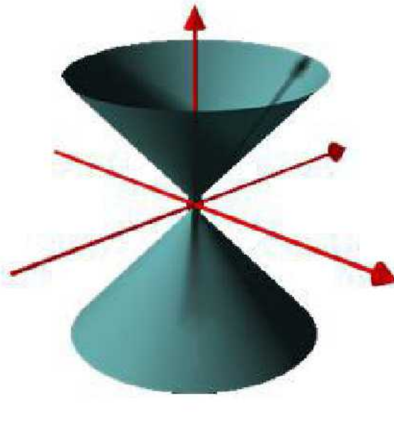
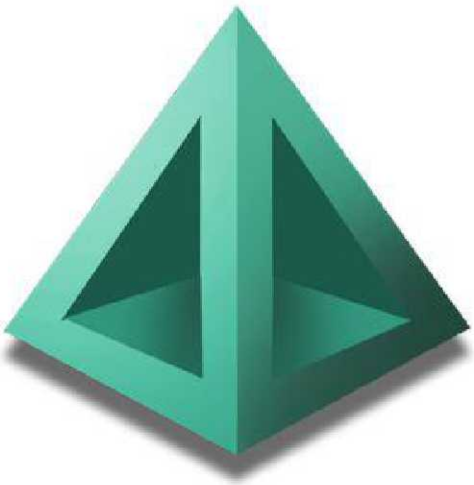
2017

رحلة التفوق في السادس
عطاءٌ بلا حدود





إعداد الأستاذ: عبدالكريم جبر

مساعد الطالب في
الرياضيات
للصف السادس العلمي

@رحلة التفوق في السادس

الفصل الأول
الأعداد المركبة

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿وقل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون﴾

انطلاقا من قول المصطفى (ص) : ((زكاة العلم نشرهُ وتعليمهُ))

تضع شبكة مواقع رحلة التفوق في السادس التعليمية التربوية الخيرية بيـن ايديكم احدى اعمالها من ملازم مرحلة السادس الاعدادي هذه المرحلة الهامة والمصيرية في حياة اعزائنا الطلبة وخاصة المتعففين منهم ولمن يتعذر عليه اقتناء هذه المساعدات المدرسية في محافظاتنا العراقية العزيزة بهدف النهوض وتطوير الواقع التعليمي ولو بالجزء اليسير .

إذ أن شبكتنا لاتقتصر عاى نشر الملازم المدرسية فقط أنما تقوم بنشـر الدروس المرئية المجانية لاكفأ التدريسيين بالاضافة الـى مجموعة قنواتنا التـدريسية وكذلك الارشادات والنصائح وطـرق الدراسـة الصحيحة هذا من جهة. أما من جهة أخرى فهو كسر لشـوكة بعض المحسـوبين علـى الكادر التدريسي ممن يرفضون نشـر ملازمهم والتعاون مع ابنائهم الطلبة ليأخذوا من المال هدفا أهم ويتناسوا مصلحة الطالب والواقع التعليمي المتدني.

علماً ان كـادر الشـبكة والقائمين عليها هم مجموعة من الشـباب العراقي الواعي المثقف بالاضافة الى تعـاون بعض المدرسين الكرام كما واننا غير تابعين لاي جهة كانت رسمية او غير رسـمية انما سر تجمعنا وعملنا هو خيري بحت آملين من الله عز وجل ان يوفقنا لتقديم كل ما هو صالح لشعبنا و وطننا الحبيب.

كادر شبكة رحلة التفوق في السادس

٢٠١٥/٨/٢١

ا.د : اشرف الوائلي

ا.د : مينا الاحمد

٠٧٨٠٣٠٠٢١٤٠
استاذ عبد الكريم جبر

الفصل الاول - الاعداد المركبة -
Complex Numbers

مقدمة

مجموعة الاعداد الطبيعية ① $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

مجموعة الاعداد الصحيحة ② $Z = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$

مجموعة الاعداد النسبية ③ $Q = \{\frac{a}{b} , a, b \in Z , b \neq 0\}$

مجموعة الاعداد الحقيقية ④ $R = Q \cup$ الجذور

الجذور

- جذور دليلها عدد فردي
  - جذور موجبة: $\sqrt[3]{8} = 2$ ، $\sqrt[5]{32} = 2$
  - جذور سالبة: $\sqrt[3]{-27} = -3$ ، $\sqrt[3]{-125} = -5$
- جذور دليلها عدد زوجي
  - جذور موجبة: $\sqrt{4} = 2$ ، $\sqrt[4]{81} = 3$
  - جذور سالبة: $\sqrt{-25} \notin R$

جميعها تنتمي الى R

$= \sqrt{(25)(-1)}$

$= \sqrt{25} \times \sqrt{-1}$

$= 5i \notin R$ نفرض أن $\sqrt{-1} = i$

يسمى عدد تخيلي

العدد التخيلي:- هي اعداد حقيقية سالبة موضوعة داخل جذور دليلها عدد زوجي .

Ex:
① $\sqrt{-16} = 4i$

② $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\, i$

③ $\sqrt[6]{-64} = 2i$

قوى i

$i = \sqrt{-1}$ بتربيع الطرفين $\Rightarrow i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \times i \Rightarrow i^3 = (-1) \times i \Rightarrow i^3 = -i$

$i^4 = i^2 \times i^2 \Rightarrow i^4 = (-1)(-1) \Rightarrow i^4 = 1$

ملاحظة: اذا كان أس i اكبر من 4 نقسم الاس على 4 ويكون باقي القسمة هو الاس الجديد

① اذا كان باقي القسمة صفر فيكون الجواب = 1
Ex: $i^{12} = i^0 = 1$, $i^{20} = i^0 = 1$

② اذا كان باقي القسمة واحد فيكون الجواب = i
Ex: $i^9 = i^1 = i$, $i^{45} = i^1 = i$

③ اذا كان باقي القسمة اثنان فيكون الجواب = -1
Ex: $i^{10} = i^2 = -1$, $i^{18} = i^2 = -1$

④ اذا كان باقي القسمة ثلاث فيكون الجواب = $-i$
Ex: $i^{11} = i^3 = -i$, $i^{33} = i^3 = -i$

ملاحظة:

① اذا كانت قوى i عدد زوجي فيكون الجواب أما 1 او -1

② اذا كانت قوى i عدد فردي فيكون الجواب أما i او $-i$

Ex:

* اذا كان الاس الى i اكبر من العدد 100 نأخذ آحاد العدد وعشراته ونهمل الباقي ونقسم العدد على 4 ونأخذ الباقي

① $i^{122} = i^{22} = i^2 = -1$

② $i^{2016} = i^{16} = i^0 = 1$

③ $i^{-12} = \frac{1}{i^{12}} = \frac{1}{i^0} = \frac{1}{1} = 1$

* اذا كان الاس من مضاعفات العدد 4 = 1

④ $i^{4n} = 1$, $n \in N$

⑤ $i^{8n+5} = i^{8n} \times i^5 = 1 \times i = i$

---

* العدد المركب $C = a + bi$

يقال للعدد $a + bi$ عدداً مركباً حيث a, b عددان حقيقيان، وأن $i = \sqrt{-1}$ ويسمى a جزءه الحقيقي ويسمى b جزءه التخيلي ويرمز للاعداد المركبة بالرمز C وتسمى الصيغة العادية او الصيغة الجبرية ويمكن كتابة العدد المركب بالصيغة الديكارتية على شكل زوج مرتب .

صفته	الصيغه الديكارتيه	جزءه التخيلي	جزءه الحقيقي	عدد مركب
مركب تام	(4 , 5)	5	4	$4+5i$
مركب تام	(-3 , -2)	-2	-3	$-3-2i$
تخيلي بحت	(0 , 3)	3	0	$3i \rightarrow 0+3i$
حقيقي بحت	(-4 , 0)	0	-4	$-4 \rightarrow -4+0i$

* العمليات على الاعداد المركبه

اولاً عمليه الجمع

نقوم بجمع الحقيقي مع الحقيقي وجمع التخيلي مع التخيلي

س/ جد ناتج كلاً مما يأتي بالصيغه العاديه

① $(3+4i)+(2+5i)=5+9i$

② $(2-3i)+(1+i)=3-2i$

③ $5+(2+i)=7+i$

④ $3i+(1+5i)=1+8i$

⑤ $(2+3i)+(-2+2i)=0+5i$ صيغه عاديه

* ليس ضروري ترتيب الحل بالصيغه العاديه لكن الجواب النهائي نجعله بالصيغه العاديه

⑥ $(4-2i)+(3+\sqrt{-4})$

$=(4-2i)+(3+2i)=7+0i$

ثانياً عمليه الطرح

س/ جد ناتج ما يأتي بالصيغه العاديه

عند الطرح تنقلب جميع الاشارات

① $(5+2i)-(2-3i)$

$=(5+2i)+(-2+3i)$ نظير جمعي

$=3+5i$

ملاحظة ممكن ادخال الاشارة السالبه ورفع الاقواس ثم الجمع

$(5+2i)-(2-3i)$

$=5+2i-2+3i=3+5i$

② $(5-3i)-(-3+2i)$

$=(5-3i)+(3-2i)=8-5i$

ثالثاً عملية الضرب

س/ جد ناتج كلاً مما يأتي بالصيغة العادية

① $4(5+3i) = 20 + 12i$

② $3i(2+4i) = 6i + 12i^2$

ملاحظة اذا كان أس i اكبر من واحد نقلل الاس

$= 6i + 12(-1)$

$= 6i - 12$

بصورة عامة عند وجود i^2 نحذف و نقلب اشارة العدد الموجود جنبها

$= -12 + 6i$ عادية

③ $(2+3i)(1+i) = 2 + 2i + 3i + 3i^2$

$= 2 + 2i + 3i - 3$

$= -1 + 5i$

④ $3(2+3i)^2 = \left(\text{الحد الاول}\right)^2 \mp 2\left(\text{الحد الاول}\right)\left(\text{الحد الثاني}\right) + \left(\text{الحد الثاني}\right)^2$ نفتح القوس مربع حدانية

الاشارة دائماً موجبة

$= 3(4 + 12i + 9i^2)$

$= 3(4 + 12i - 9)$

$= 3(-5 + 12i) = -15 - 36i$

⑤ $(2+i)^2 + (12+2i)$

$= (4 + 4i + i^2) + (12 + 2i)$

$= (4 + 4i - 1) + (12 + 2i)$

$= (3 + 4i) + (12 + 2i) = 15 + 6i$

* ملاحظة : عند وجود $(a \mp bi)^2$ وكان العدد الحقيقي والتخيلي متساويين يكون الحل $2\left(\text{الحد الاول}\right)\left(\text{الحد الثاني مع الاشارة}\right)$ فقط كما موضح في الامثلة

Ex

① $(2+2i)^2 = 2(2)(2i) = 8i$

② $(3-3i)^2 = 2(3)(-3i) = -18i$

③ $(1+i)^2 = 2(1)(i) = 2i$

④ $(1-i)^2 = 2(1)(-i) = -2i$

س/ جد ناتج كلاً مما يأتي بالصيغة العادية

نصف أس العدد الزوجي

① $(1+i)^6 = [(\quad)^2]$ ← ملاحظة : اذا كان الاس عدد زوجي يكتب

$= [(1+i)^2]^3$ حسب الملاحظة الموجودة في السؤال السابق $(1+i)^2 = 2i$

$= [2i]^3 = 8i^3 = 8(-i) = -8i = 0 - 8i$

② $(1-i)^8 = [(1-i)^2]^4$ $(1-i)^2 = -2i$

$= [-2i]^4 = 16i^4 = 16(1) = 16 + 0i$

حسب الملاحظة

③ $(1+i)^4 - (1-i)^4$

$= [(1+i)^2]^2 - [(1-i)^2]^2$

$= [2i]^2 - [-2i]^2 = 4i^2 - 4i^2 = 0 + 0i$

④ $(1+i)^7 = (\quad)^{\text{باقي الاس}}(\quad)^1$ ← ملاحظة : اذا كان الاس عدد فردي يكتب

اي نقوم بسحب قوس فيكون باقي الاس عدد زوجي يحل كما في الملاحظة اعلاه

$= (1+i)^6(1+i)$

$= [(1+i)^2]^3(1+i)$

$= [2i]^3(1+i)$

$= 8i^3(1+i)$

$= -8i(1+i) = -8i - 8i^2 = -8i + 8 = 8 - 8i$

2012 / د2

⑤ $(1+i)^5 - (1-i)^5 = (1+i)^4(1+i) - (1-i)^4(1-i)$

$= [(1+i)^2]^2(1+i) - [(1-i)^2]^2(1-i)$

$= [2i]^2(1+i) - [-2i]^2(1-i)$

$= 4i^2(1+i) - 4i^2(1-i)$

$= -4(1+i) + 4(1-i)$

$= -4 - 4i + 4 - 4i = -8i = 0 - 8i$

⑤ $(1+i)^3+(1-i)^3$

$=(1+i)^2(1+i)+(1-i)^2(1-i)$

$=(2i)(1+i)+(-2i)(1-i)$

$=2i+2i^2-2i+2i^2=-2-2=-4=-4+0i$

س/ جد ناتج مما يأتي بالصيغة العادية واجب

① $(3+4i)^2+(5-3i)(1+i)$ ج= $[1+26i]$

② $(1+i)^8+(1-i)^8$ ج= $[32+0i]$

③ $(1+i)^{11}-(1-i)^{11}$ ج= $[0+64i]$

④ اذا كانت $x=2+3i$, $y=3-i$ جد قيمة x^2+2y^2 ج= $[11+0i]$

* مرافق العدد المرافق $\bar{C}$

مرافق العدد المركب نقوم بتغير اشارة الجزء التخيلي فقط واشارة الجزء الحقيقي تبقى ثابتة

$C=a\mp bi \xrightarrow{\text{مرافقه}} \bar{C}=a\pm bi$

Ex//

① $3+5i \xrightarrow{\text{مرافقه}} 3-5i$

② $-2-i \longrightarrow -2+i$

③ $3i \longrightarrow -3i$

④ $5 \longrightarrow 5$

* ملاحظة:

حول ضرب عدد مركب في مرافقه

$C\cdot\bar{C}=(a+bi)\cdot(a-bi)$

$=(\text{الحقيقي})^2+(\text{التخيلي بدون } i)^2$ لقوس واحد

$=(a)^2+(b)^2$

س/ جد ناتج جمع وضرب الاعداد المركبة الآتية مع مرافقها.

① $4+3i \xrightarrow{\text{مرافقه}} 4-3i$

$(4+3i)+(4-3i)=8$

$(4+3i)\cdot(4-3i)=(4)^2+(3)^2=16+9=25$

حسب الملاحظة اعلاه

② $-4+5i \xrightarrow{\text{مرافقه}} -4-5i$

$(-4+5i)+(-4-5i)=-8$

$(-4+5i)\cdot(-4-5i)=(-4)^2+(5)^2=16+25=41$

③ $3i \xrightarrow{\text{مرافقه}} -3i$

$(3i)+(-3i)=0$

$(3i)\cdot(-3i)=(3)^2=9$

* من خلال الامثلة يمكن استنتاج صفات للعددين المترافقين

① مجموع العددين المترافقين عدد حقيقي خالي من i

② ضرب العددين المترافقين عدد حقيقي خالي من i

س/ جد ناتج بالصيغة العادية

2013 د① $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)$

نقلل قوى i ثم نجد ناتج قوسين ونضرب في القوس الثالث

$i^3=-i$

$=(1-i)(1+1)(1+i)$

$=(1-i)(1+i)(2)$ (عدد، مرافقه)

$=(1+1)(2)=(2)(2)=4+0i$

$[4+0i]=4$

واجب ② $(1-i^5)(1-i^{10})(1-i^{15})$

رابعاً: عملية القسمة على الاعداد المركبة.

س/ جد ناتج مما يأتي بالصيغة العادية

① $\dfrac{3-i}{2+i}$

ملاحظة: كل عدد يحتوي في مقامه على i يضرب ويقسم في مرافقه لكي نحوله الى صيغة عادية

$=\dfrac{3-i}{2+i}\cdot\dfrac{2-i}{2-i}$

$=\dfrac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$ نضرب بسط × بسط ونضرب مقام × مقام (عدد، مرافقه)

$=\dfrac{6-3i-2i+i^2}{4+1}=\dfrac{6-3i-2i-1}{5}=\dfrac{5-5i}{5}=\dfrac{5}{5}-\dfrac{5i}{5}=1-i$

② $\dfrac{1+2i}{-2+i}$

$=\dfrac{1+2i}{-2+i}\cdot\dfrac{-2-i}{-2-i}=\dfrac{(1+2i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)}$

$=\dfrac{-2-i-4i-2i^2}{4+1}=\dfrac{-2-i-4i+2}{5}=\dfrac{-5i}{5}=-i=0-i$

③ $\dfrac{12+i}{i}$

$$= \frac{12+i}{i} \times \frac{-i}{-i} = \frac{-12i-i^2}{1} = -12i+1 = 1-12i$$

عدد — مرافقه

④ $\dfrac{i}{2+3i}$

$$= \frac{i}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2i-3i^2}{4+9} = \frac{2i+3}{13} = \frac{3+2i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$$

عدد — مرافقه

⑤ $\dfrac{2+3i}{1-i} \times \dfrac{1+4i}{4+i}$

تضرب بسط × بسط
مقام × مقام

ممكن أن يحل كل كسر منفرد
ثم تضرب النتائج.

$$= \frac{2+8i+3i+12i^2}{4+i-4i-i^2}$$

$$= \frac{2+8i+3i-12}{4+i-4i+1} = \frac{-10+11i}{5-3i}$$

$$= \frac{-10+11i}{5-3i} \times \frac{5+3i}{5+3i}$$

عدد — مرافقه

$$= \frac{-50-30i+55i+33i^2}{25+9} = \frac{-50-30i+55i-33}{34} = \frac{-83+25i}{34} = \frac{-83}{34} + \frac{25}{34}i$$

⑥ $\left(\dfrac{3+i}{1+i}\right)^3$

* عند وجود كسر داخل قوس أسه أكبر من واحد
يكون التبسيط لداخل القوس وذلك بالضرب في مرافق المقام
ثم أس القوس.

$$= \left(\frac{3+i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}\right)^3 = \left(\frac{3-3i+i-i^2}{1+1}\right)^3 = \left(\frac{3-3i+i+1}{2}\right)^3$$

عدد — مرافقه

$$= \left(\frac{4-2i}{2}\right)^3 = \left(\frac{4}{2} - \frac{2i}{2}\right)^3$$

$$= (2-i)^3 = (2-i)^2(2-i) = (4-4i+i^2)(2-i) = (4-4i-1)(2-i)$$

$$= (3-4i)(2-i) = 6-3i-8i+4i^2 = 6-3i-8i-4 = 2-11i$$

⑦ $\dfrac{(1+i)^7}{(1-i)^7} = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^7$

اكمل الحل واجب ج: [0 − i]

س/ اثبت أن $\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = -2$

حسب الملاحظة

$(1+i)^2 = 2i$

$(1-i)^2 = -2i$

$= \frac{-2i}{1+i} + \frac{2i}{1-i}$

$= \frac{-2i(1-i)+2i(1+i)}{(1+i)(1-i)}$

نوحد المقامات بين الكسرين او نضرب كل كسر في مرافقه ولسهولة الحل نوحد المقامات

(مرافقه ، عدد)

$= \frac{-2i+2i^2+2i+2i^2}{1+1} = \frac{-2-2}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

س/ اثبت أن $\frac{1}{(2-i)^2} - \frac{1}{(2+i)^2} = \frac{8}{25}i$

$= \frac{1}{4-4i+i^2} - \frac{1}{4+4i+i^2} = \frac{1}{4-4i-1} - \frac{1}{4+4i-1}$

$= \frac{1}{3-4i} - \frac{1}{3+4i}$ نوحد المقامات

$= \frac{1(3+4i)-1(3-4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i-3+4i}{9+16} = \frac{8}{25}i$

(عدد ، مرافقه)

س/ واجب اثبت كلاً من

① $\frac{i}{(1-i)^2} - \frac{i}{(1+i)} = -1$

② $\frac{(1+i)^2}{2-i} - \frac{(1-i)^2}{2+i} = \frac{8}{5}i$

③ $\left(\frac{1-i}{2+i}\right)^2 + \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \frac{-16}{25}$

س/ واجب اذا كانت $x = \frac{4-3i}{1-2i}$ أثبت أن $x^2 - 4x + 5 = 0$

ملاحظة : أجعل الكسر اولاً بالصيغة العادية ثم عوض قيم x في المعادلة .

ملاحظة: ليكن $a+bi$ عدد مركب

- ← مرافقه: $a-bi$ نغير إشارة التخيلي فقط
- ← نظيره الجمعي: $-a-bi$ نغير الإشارتين
- ← نظيره الضربي: $\frac{1}{a+bi}$ مقلوبه بنفس الإشارة

س/ جد النظير الضربي للعدد $c=2-2i$ ثم ضعه بالصيغة العادية

$$c=2-2i \xrightarrow{\text{نظيره الضربي}} \frac{1}{2-2i}$$

$$=\underset{\text{عدد}}{\frac{1}{2-2i}}\times\underset{\text{مرافقه}}{\frac{2+2i}{2+2i}}=\frac{2+2i}{4+4}=\frac{2+2i}{8}=\frac{2}{8}+\frac{2i}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$$

س/ ما هو النظير الضربي للعدد $c=\frac{2+5i}{3+2i}$ ثم ضعه بالصيغة العادية

$$c=\frac{2+5i}{3+2i} \xrightarrow{\text{نظيره الضربي}} \frac{3+2i}{2+5i}$$

$$=\underset{\text{عدد}}{\frac{3+2i}{2+5i}}\times\underset{\text{مرافقه}}{\frac{2-5i}{2-5i}}=\frac{6-15i+4i-10i^2}{4+25}$$

$$=\frac{6-15i+4i+10}{29}=\frac{16-11i}{29}=\frac{16}{29}-\frac{11}{29}i$$

واجب

س/ اكتب العدد $(2+i)^2$ بالصيغة العادية ثم جد النظير الضربي له واكتبه بالصيغة العادية أيضاً. $[c=\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i]$

* خواص الأعداد المترافقة

① $\overline{c_1+c_2}=\overline{c_1}+\overline{c_2}$

② $\overline{c_1-c_2}=\overline{c_1}-\overline{c_2}$

③ $\overline{c_1\times c_2}=\overline{c_1}\times\overline{c_2}$

④ $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)}=\frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$

⑤ $\overline{\overline{c}}=c$

س/ اذا كان $C_1=1+i$ ، $C_2=3-2i$ تحقق من أن $\overline{C_1+C_2}=\overline{C_1}+\overline{C_2}$

$\overline{C_1+C_2}=\overline{(1+i)+(3-2i)}$

* اذا كان خط المرافق فوق مسألة نجد المرافق في آخر خطوة الحل

$=\overline{4-i}$

$=4+i$

$\overline{C_1}+\overline{C_2}=\overline{(1+i)}+\overline{(3-2i)}$

* اذا كان خط المرافق منفصل نجد المرافق في اول خطوة للحل

$=(1-i)+(3+2i)$

$=4+i$

$\therefore\ \overline{C_1+C_2}=\overline{C_1}+\overline{C_2}$

س/ اذا كان $C_1=3-4i$ ، $C_2=1+2i$ تحقق من أن $\overline{C_1\times C_2}=\overline{C_1}\times\overline{C_2}$

$\overline{C_1\times C_2}=\overline{(1+2i)\times(3-4i)}$

$=\overline{3-4i+6i-8i^2}$

$=\overline{3-4i+6i+8}$

$=\overline{11+2i}$ نأخذ المرافق في آخر خطوة الحل

$=11-2i$

$\overline{C_1}\times\overline{C_2}=\overline{(1+2i)}\times\overline{(3-4i)}$

نأخذ المرافق في اول خطوة للحل

$=(1-2i)\times(3+4i)$

$=3+4i-6i-8i^2$

$=3+4i-6i+8$

$=11-2i$

$\therefore\ \overline{C_1\times C_2}=\overline{C_1}\times\overline{C_2}$

س/ اذا كان $C_1=3-i$ ، $C_2=2+i$ تحقق من أن $\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)}=\frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}$

$\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)}=\overline{\left(\frac{3-i}{2+i}\right)}$

$=\overline{\left(\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}\right)}$ (عدد ، مرافقه)

$=\overline{\left(\frac{6-3i-2i+i^2}{4+1}\right)}$

$=\overline{\left(\frac{6-3i-2i-1}{5}\right)}$

$=\overline{\left(\frac{5-5i}{5}\right)}=\overline{\left(\frac{5}{5}-\frac{5i}{5}\right)}$

$=1+i$

$\frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}=\frac{\overline{(3-i)}}{\overline{(2+i)}}$

$=\frac{3+i}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i}$ (عدد ، مرافقه)

$=\frac{6+3i+2i+i^2}{4+1}$

$=\frac{6+3i+2i-1}{5}$

$=\frac{5+5i}{5}=\frac{5}{5}+\frac{5i}{5}$

$=1+i$

$\therefore\ \overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)}=\frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}$

واجب

س/ اذا كان $c_1=1+i$ ، $c_2=2+i$ تحقق من أن

① $\overline{c_1+c_2}=\overline{c_1}+\overline{c_2}$

② $\overline{c_1-c_2}=\overline{c_1}-\overline{c_2}$ ③ $\overline{c_1\times c_2}=\overline{c_1}\times\overline{c_2}$ ④ $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)}=\frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$

* تحليل مقدار أو عدد الى عاملين .

* درسنا سابقاً موضوع تحليل الفرق بين مربعين كما موضح في المثال

$x^2-4=(x-2)(x+2)$

لكن اذا اعطى السؤال x^2+4 هذا مجموع مربعين لايمكن التحليل ضمن مجموعة الاعداد الحقيقية

لكن ضمن مجموعة الاعداد المركبة ممكن التحليل حيث نقوم باستبدال اشارة الوسط الموجبة بـ i^2- كما موضح في المثال .

$x^2+4=x^2-4i^2$

$=(x-2i)(x+2i)$

س/ حلل كلاً من الاعداد الى حاصل ضرب عاملين من صورة $a+bi$ حيث $a,b\in\mathbb{Q}$

① $13=4+9$

$=4-9i^2=(2-3i)(2+3i)$

طريقة ثانية $13=9+4$

$=9-4i^2=(3-2i)(3+2i)$

② $53=49+4$

$=49-4i^2=(7-2i)(7+2i)$

③ $85=36+49$

$=36-49i^2=(6-7i)(6+7i)$

ممكن يحلل العدد بأكثر من طريقة

$85=81+4$

$=81-4i^2=(9-2i)(9+2i)$

* ملاحظة : ممكن معرفة تحليل العددين من خلال جمع المربعات

العدد	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-------
مربعه	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169-------

س/ ضع المقدار $\frac{125}{10+5i}$ بالصورة العادية بدون الضرب في مرافق مقامه

$$\frac{125}{10+5i} = \frac{100+25}{10+5i}$$

$$= \frac{100-25i^2}{10+5i} = \frac{(10-5i)(10+5i)}{(10+5i)} = 10-5i$$

ملاحظة: متى نستخدم التحليل

نستخدم التحليل عندما يطلب في السؤال ويذكر حلل بالصيغة a+bi أو يعطي كسر بسطه يتحلل ومقامه يكون احد عوامل البسط.

س/ ضع المقدار $\frac{9x^2+49}{3x+7i}$ بالصيغة العادية

اذا كانت حدود المقام هي جذور تربيعية للحدود في البسط نقوم بتحليل البسط ثم الاختصار

$$\frac{9x^2+49}{3x+7i} = \frac{9x^2-49i^2}{3x+7i}$$

$$= \frac{(3x-7i)(3x+7i)}{(3x+7i)} = 3x-7i$$

* ايجاد قيمتي x, y الحقيقيتين: - تساوي عددين -

1. عند وجود كسور نتخلص منها وذلك بالضرب في مرافق المقام
2. عند وجود اقواس نقوم بفتح هذه الاقواس.
3. اذا كانت قوى i اكبر من واحد نقلل الاس.
4. اذا كانت المعادله لاتحتوي على كسور ولا على اقواس وقوى i ليس اكبر من واحد نطبق فكرة التساوي

   الاعداد الحقيقية = الاعداد الحقيقية

   الاعداد التخيلية = الاعداد التخيلية

5. اذا كانت المعادله تحتوي على مجهول واحد نعوضها بالمعادلة التي تحتوي على مجهولين
6. اذا كانت المعادلتين تحتوي على مجهولين تحل آنياً بالحذف او بالتعويض.

س/ جد قيمة كلاً من x, y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلات الآتية.

① $2x-1+2i = 1+(y+1)i$

نطبق فكرة التساوي $2x-1+2i = 1+iy+i$

$2x-1=1$ (الحقيقي = الحقيقي) , $2i = iy+i$ (التخيلي = التخيلي)

$2x=2$, $2 = y+1$

$y = 2-1 \Rightarrow y=1$

② $y+5i=(2x+i)(x+2i)$

$y+5i=2x^2+4ix+ix+2i^2$

$y+5i=2x^2+4ix+ix-2$ فكرة التساوي

$y=2x^2-2$ ------①

$5i=4ix+ix$

$5=4x+x \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1$ نعوض قيمة x في ①

$\therefore y=2(1)^2-2 \Rightarrow y=2-2 \Rightarrow y=0$

③ $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+(x+yi)=(1+2i)^2$

$\left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)+x+yi=1+4i+4i^2$

$\left(\frac{1-i-i+i^2}{1+1}\right)+x+yi=1+4i-4$ (يعود / مرافقه)

$\left(\frac{1-i-i-1}{2}\right)+x+yi=-3+4i$

$\frac{-2i}{2}+x+yi=-3+4i$

$-i+x+yi=-3+4i$ فكرة التساوي

$x=-3$

$-i+yi=4i \Rightarrow -1+y=4 \Rightarrow y=4+1 \Rightarrow y=5$

يمكن كتابة الاعداد التخيلية بدون i مباشر

④ $(x+2i)(y+2i)+1=8i$

$xy+2ix+2iy+4i^2+1=8i$

$xy+2ix+2iy-4+1=8i$ فكرة التساوي

$xy-4+1=0 \Rightarrow xy=3 \Rightarrow y=\frac{3}{x}$ ------①

(حقيقي / حقيقي)

$2x+2y=8$] ÷2 عندما تكون المعادلة تقبل القسمة على عدد نقسم عليه

(تخيلي / تخيلي / تخيلي)

$x+y=4$ ------② نعوض ① في ②

$x+\frac{3}{x}=4$] × x نقوم بضرب المعادلة في المقام لكي تكون المعادلة غير كسرية .

$x^2+3=4x$ نصفر المعادلة مع الترتيب ← يتبع

$x^2-4x+3=0$ تجربة

$(x-3)(x-1)=0$

$x-3=0 \Rightarrow x=3 \;,\; \therefore y=\frac{3}{3}=1$

$x-1=0 \Rightarrow x=1 \;,\; \therefore y=\frac{3}{1}=3$

⑤ $\frac{2-i}{1+i}x+\frac{3-i}{2+i}y=\frac{1}{i}$

$\left(\frac{2-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)x+\left(\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}\right)y=\frac{1}{i}\cdot\frac{-i}{-i}$

(عدد × مرافقه)

$\left(\frac{2-2i-i+i^2}{1+1}\right)x+\left(\frac{6-3i-2i+i^2}{4+1}\right)y=\frac{-i}{1}$

$\left(\frac{2-2i-i-1}{2}\right)x+\left(\frac{6-3i-2i-1}{5}\right)y=-i$

$\left(\frac{1-3i}{2}\right)x+\left(\frac{5-5i}{5}\right)y=-i$

$\left(\frac{1}{2}-\frac{3i}{2}\right)x+\left(\frac{5}{5}-\frac{5i}{5}\right)y=-i$

$\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}ix+y-iy=-i$] $\times 2$ نضرب المعادلة في

$x-3ix+2y-2iy=-2i$ فكرة التساوي

$x+2y=0$ ------- ①

$-3x-2y=-2$ ------- ②

بالجمع

$-2x=-2$

$x=1$. نعوض قيمة x في ① $\Rightarrow 1+2y=0 \Rightarrow 2y=-1 \Rightarrow y=\frac{-1}{2}$

واجب بيتي: جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحققان المعادلات الآتية .

① $\frac{5+5i}{2-i}x+(2+2i)y=5+7i$ $[x=1, y=2]$ =ج.

② $(1+2i)x+(3-i)y=\frac{9+i}{1+i}$ $[x=-1, y=2]$ =ج.

③ $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3+(2x-yi)=(1+2i)^2$ $[x=\frac{-3}{2}, y=-5]$ =ج.

④ $(2x+3iy)(1+i)^2=\frac{3-i}{1-i}$ $[x=\frac{1}{4}, y=\frac{-1}{3}]$ =ج.

⑤ $(x+3i)(y+3i)+7=9i$ $\begin{bmatrix}x=2, y=1\\ x=1, y=2\end{bmatrix}$ =ج.

* ايجاد قيمتي x, y اذا كان العددان مترافقان

① نقوم برفع الفارزة بين العددين ونضع مكانها مساواة (=)
② نقوم بأخذ المرافق لأحد الكسرين فقط للبسط والمقام والافضل اخذ المرافق للكسر الخالي من x, y
③ نقوم بتبسيط الكسرين وذلك بقاعدة ضرب الوسطين = ضرب الطرفين
④ نطبق قاعدة فكرة تساوي عددين .

س/ اذا كان $\frac{3-2i}{i}$, $\frac{x-yi}{1+5i}$ مترافقان فجد قيمة كلاً من $x, y \in R$

وضعنا مساواة بين العددين ونأخذ المرافق لأحد الكسرين فقط وذلك بتغيير اشارة الجزء التخيلي للبسط والمقام .

$$\frac{x-yi}{1+5i} = \overline{\left(\frac{3-2i}{i}\right)}$$

$$\frac{x-yi}{1+5i} = \frac{3+2i}{-i}$$

$$-i(x-yi) = (1+5i)(3+2i)$$

$$-ix + yi^2 = 3 + 2i + 15i + 10i^2$$

$$-ix - y = 3 + 2i + 15i - 10$$

$$-ix - y = -7 + 17i$$ فكرة التساوي

$$-y = -7 \Rightarrow y = 7$$

$$-x = 17 \Rightarrow x = -17$$

س/ جد قيمة x, y الحقيقيتين اذا علمت أن $\frac{6}{x+yi}$, $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان

2012 / 2015 د2

$$\frac{6}{x+yi} = \overline{\left(\frac{3+i}{2-i}\right)} \Longrightarrow \frac{6}{x+yi} = \frac{3-i}{2+i}$$ وسطين × الطرفين

ملاحظة : عند وجود اي مقدار ( ) مضروب في x+yi أو في أي مجهول الافضل في الحل نقله الى الجهة الثانية وجعله مقام اي نقسم الطرفين عليه

$$(3-i)(x+yi) = 12 + 6i$$

$$x + yi = \frac{12+6i}{3-i}$$

$$x + yi = \frac{12+6i}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i}$$

عدد ، مرافقه

يتبع ←

$$x+yi=\frac{36+12i+18i+6i^2}{9+1}$$

$$x+yi=\frac{36+12i+18i-6}{10}$$

$$x+yi=\frac{30+30i}{10}$$

$$x+yi=\frac{30}{10}+\frac{30i}{10}$$

$x+yi=3+3i$ فكرة التساوي

$\therefore x=3$ (حقيقي = حقيقي) , $y=3$ (تخيلي = تخيلي)

واجب
س/ جد قيمتي x, y الحقيقيتين اذا علمت أن كلاً من العددان مترافقان

$\frac{x+yi}{3+4i}, \frac{5+i}{2-i}$ $[x=11, y=3]$ = ج.

$\frac{7-6i}{x+yi}, \frac{5-5i}{1-3i}$ $[x=4, y=-]$ = ج.

$\frac{x-i}{2-i}, \frac{y-i}{4+i}$ $[x=7, y=13]$ = ج.

عامة 2013
س/ جد قيمة $x, y \in R$ والتي تحقق $\frac{y}{1+i}=\frac{x^2+4}{x+2i}$

اذا كان حدود المقام جذور تربيعية للحدود في البسط نقوم بتحليل البسط ثم الاختصار

$$\frac{y}{1+i}=\frac{x^2-4i^2}{x+2i}$$

$$\frac{y}{i+i}=\frac{(x-2i)(x+2i)}{(x+2i)}$$

$$\frac{y}{1+i}=\frac{(x-2i)}{1}\Rightarrow(x-2i)(1+i)=y$$

$x+ix-2i-2i^2=y\Rightarrow x+ix-2i+2=y$ فكرة التساوي

$x+2=y$ ......① (حقيقي = حقيقي) , $ix-2i=0$ (تخيلي = تخيلي) $\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x=2$ نعوضها في ①

$\therefore 2+2=y\Rightarrow y=4$

س/ واجب جد قيمتي x, y الحقيقيتين

① $\frac{y}{1+i}=\frac{x^2+9}{x+3i}$ $[x=3, y=6]$ = ج.

② $(x+2i)(x-i)=\frac{121+9y^2}{11+3yi}$ $\left[\begin{matrix}x=3, y=-1\\ x=-3 \ldots\end{matrix}\right]$ = ج.

* ايجاد الجذور التربيعية للعدد المركب C

ملاحظة: تستخدم هذه الطريقة اذا كان العدد المركب يحتوي على i

① نفرض $x+yi=\sqrt{\text{العدد المركب}}$

② نقوم بتربيع الطرفين فيكون الطرف الايسر دائماً $x^2-2xyi-y^2$

③ نطبق فكرة التساوي .

④ نقوم بتعويض معادلة الدرجة الاولى في معادلة الدرجة الثانية ثم نبسط المعادلة من تحليل ونجد قيم x,y ونكتب الجذور

⑤ الجذور التربيعية دائماً احدهما يكون النظير الجمعي للآخر اي عكس اشارته

ملاحظة للتحقق من صحة الحل نقوم بتربيع احد الجذور فيكون الجواب هو السؤال

س/ جد الجذور التربيعية للاعداد المركبة الآتية

① $C=8+6i$

نفرض ان $x+yi=\sqrt{8+6i}$

بتربيع الطرفين $(x+yi)^2=8+6i$

$x^2+2xyi+y^2i^2=8+6i$

$x^2+2xyi-y^2=8+6i$ فكرة التساوي: الحقيقي = الحقيقي ، التخيلي = التخيلي

الطرف الايسر ثابت في كل الاسئلة

$x^2-y^2=8 \ldots\ldots ①$

$2xy=6\ ]\div 2$

$xy=3 \Rightarrow y=\frac{3}{x} \ldots\ldots ②$ نعوض ② في ①

$x^2-\left(\frac{3}{x}\right)^2=8 \Rightarrow x^2-\frac{9}{x^2}=8\ ]\cdot x^2 \Rightarrow x^4-9=8x^2$ نجعل المعادلة مع الترتيب

$x^4-8x^2-9=0 \Rightarrow (x^2-9)(x^2+1)=0$ (تجربة) (يهمل)

توضيح: $x^2+1=0$ ، $x^2=-1$ ، $x=\pm\sqrt{-1} \notin R$

$x^2-9=0$

$x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$

$x=3\ ,\ \therefore y=\frac{3}{3}=1\ ,\ 3+i$

$x=-3\ ,\ \therefore y=-1\ ,\ -3-i$

الجذوران

ملاحظة للتحقق من صحة الحل

$(3+i)^2=9+6i+i^2=9+6i-1=8+6i$

قمنا بتربيع احد الجذور كان الجواب هو السؤال

$\therefore$ كل مجموع مربعين يهمل لانه $\notin R$

② $7+24i$

$x+yi=\sqrt{7+24i}$ نفرض أن

$(x+yi)^2=7+24i$ بالتربيع

$x^2+2xyi-y^2=7+24i$ فكرة التساوي

$x^2-y^2=7$ -----①

$2xy=24]\div 2$

$xy=12 \Rightarrow y=\frac{12}{x}$ -----② نعوض ② في ①

$x^2-(\frac{12}{x})^2=7 \Rightarrow x^2-\frac{144}{x^2}=7]\times x^2 \Rightarrow x^4-144=7x^2$

$x^4-7x^2-144=0$ تجزيء

$(x^2-16)(x^2+9)=0$
يهمل

$x^2-16=0 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$ < $x=4 , y=\frac{12}{4}=3$; $x=-4 , y=\frac{12}{-4}=-3$

$\therefore$ $4+3i , -4-3i$ الجذور

③ $c=8i$

$x+yi=\sqrt{8i}$ نفرض أن

$x^2+2xyi-y^2=8i$ بالتربيع

فكرة التساوي

$x^2-y^2=0$ -----①

$2xy=8]\div 2 \Rightarrow xy=4 \Rightarrow y=\frac{4}{x}$ -----② نعوض ② في ①

$x^2-(\frac{4}{x})^2=0 \Rightarrow x^2-\frac{16}{x^2}=0]\times x^2 \Rightarrow x^4-16=0$ فرق بين مربعين

$(x^2-4)(x^2+4)=0$
يهمل

$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$ < $x=2 , y=\frac{4}{2}=2$; $x=-2 , y=\frac{4}{-2}=-2$

$\therefore$ $2+2i , -2-2i$ الجذور

(4)

$C = -6i$

نفرض أن $x + yi = \sqrt{-6i}$

بالتربيع $x^2 + 2xyi - y^2 = -6i$

فكرة التساوي

$x^2 - y^2 = 0$ ------ ①

$2xy = -6]\div 2 \Rightarrow xy = -3 \Rightarrow y = \frac{-3}{x}$ ------ ②

$x^2 - \left(\frac{-3}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{9}{x^2} = 0] \times x^2 \Rightarrow x^4 - 9 = 0$ فرق بين مربعين

$(x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0$

يهمل

$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$x = \sqrt{3},\ y = \frac{-3}{\sqrt{3}} = \frac{-(\sqrt{3})(\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

$x = -\sqrt{3},\ y = \frac{-3}{-\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

الجذور $\therefore \sqrt{3} - \sqrt{3}i,\ -\sqrt{3} + \sqrt{3}i$

(5)

$C = -i$

نفرض أن $x + yi = \sqrt{-i}$

بالتربيع $x^2 + 2xyi - y^2 = -i$

فكرة التساوي

$x^2 - y^2 = 0$ ----- ①

$2xy = -1 \Rightarrow y = \frac{-1}{2x}$ ----- ② نعوض ② في ①

$x^2 - \left(\frac{-1}{2x}\right)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0] \times 4x^2 \Rightarrow 4x^4 - 1 = 0$ فرق بين مربعين

$(2x^2 - 1)(2x^2 + 1) = 0$

يهمل

$2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ y = \frac{-1}{2\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{-1}{\sqrt{2}},\ y = \frac{-1}{2\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

الجذور $\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i,\ \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

⑥ $C=\dfrac{4}{1-\sqrt{3}\,i}$ نقوم بجعل العدد بالصيغة العادية وذلك بالضرب في مرافق مقامه

$$C=\frac{4}{1-\sqrt{3}i}\times\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}=\frac{4(1+\sqrt{3}i)}{1+3}=\frac{\cancel{4}(1+\sqrt{3}i)}{\cancel{4}}=1+\sqrt{3}i$$

(عدد) (مرافقه)

$\therefore C=1+\sqrt{3}i$

$x+yi=\sqrt{1+\sqrt{3}i}$ نفرض أن

$x^2+2xyi-y^2=1+\sqrt{3}i$ بالتربيع

تعريف التساوي

$x^2-y^2=1$ ------①

$2xy=\sqrt{3}\Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{3}}{2x}$ ------② نعوض ② في ①

$$x^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2x}\right)^2=1\Rightarrow x^2-\frac{3}{4x^2}=1]\times 4x^2\Rightarrow 4x^4-3=4x^2$$

$$4x^4-4x^2-3=0\Rightarrow(2x^2-3)(2x^2+1)=0$$

يهمل

$$2x^2-3=0\Rightarrow 2x^2=3\Rightarrow x^2=\frac{3}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ y=\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2\cdot\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ y=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore\ \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ الجذور

س/ واجب جد الجذور التربيعية للاعداد المركبة الآتية.

① $C=3-4i$ ج. $=[2-i,\ -2+i]$

② $C=-8+6i$ ج. $=[1+3i,\ -1-3i]$

③ $C=5+12i$ ج. $=[3+2i,\ -3-2i]$

④ $C=-2i$ ج. $=[-1+i,\ 1-i]$

* حل المعادلات من الدرجة الثانية (التربيعية)

س- حل المعادلات التربيعية الآتية وبين اي منها يكون جذراها مترافقين .

① $Z^2 - 3Z + 3 + i = 0$

$a = 1 \,,\, b = -3 \,,\, c = 3 + i$

قانون الدستور $Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$Z = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(3+i)}}{2(1)}$

$Z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12 - 4i}}{2}$

$Z = \frac{3 \pm \sqrt{-3-4i}}{2}$ نجد الجذر بطريقة الفرض

$Z = \frac{3 \pm (1 - 2i)}{2}$

إما $Z = \frac{3 + (1-2i)}{2} = \frac{3 + 1 - 2i}{2}$

$= \frac{4 - 2i}{2} = \frac{4}{2} - \frac{2i}{2}$

$= 2 - i$

أو $Z = \frac{3 - (1-2i)}{2} = \frac{3 - 1 + 2i}{2}$

$= \frac{2 + 2i}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2i}{2}$

$= 1 + i$

$\therefore S = \{2 - i \,,\, 1 + i\}$

الجذران غير مترافقان

نفرض $x + yi = \sqrt{-3-4i}$

بالتربيع $x^2 + 2xyi - y^2 = -3 - 4i$

نظرية التساوي

$x^2 - y^2 = -3$ ------ ①

$2xy = -4 \,]\div 2$

$xy = -2 \Rightarrow y = \frac{-2}{x}$ ------ ②

نعوض ② في ①

$x^2 - \left(\frac{-2}{x}\right)^2 = -3$

$x^2 - \frac{4}{x^2} = -3 \,] \times x^2$

$x^4 - 4 = -3x^2$

تجزيء $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

$(x^2 + 4)(x^2 - 1) = 0$

يهمل (x^2+4)

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$x = 1 \,,\, y = \frac{-2}{1} = -2$

$x = -1 \,,\, y = \frac{-2}{-1} = 2$

الجذور $\therefore 1 - 2i \,,\, -1 + 2i$

نعوض أحد الجذور في معادلة الدستور وكلاهما يعطي نفس الحل

② $Z^2+2Z+i(2-i)=0$

$Z^2+2Z+2i-i^2=0$

$Z+2Z+2i+1=0$

$a=1\ ,\ b=2\ ,\ c=2i+1$

$Z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$Z=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4(1)(2i+1)}}{2(1)}$

$Z=\frac{-2\pm\sqrt{4-8i-4}}{2}$

$Z=\frac{-2\pm\sqrt{-8i}}{2}$ بجد جذرة الجذر

$Z=\frac{-2\pm(2-2i)}{2}$

Li $Z=\frac{-2+(2-2i)}{2}=\frac{-2+2-2i}{2}$

$=\frac{-2i}{2}=-i$

gi $Z=\frac{-2-(2-2i)}{2}=\frac{-2-2+2i}{2}$

$=\frac{-4+2i}{2}=\frac{-4}{2}+\frac{2i}{2}$

$=-2+i$

$\therefore S=\{-i\ ,\ -2+i\}$ الجذران غير مترافقان

نفرض أن $x+yi=\sqrt{-8i}$

بالتربيع $x^2+2xyi-y^2=-8i$

مقارنة التساوي

$x^2-y^2=0$ ------ ①

$2xy=-8\ ]\div 2$

$xy=-4\Rightarrow y=\frac{-4}{x}$ ------ ②

نعوض ② في ①

$x^2-\left(\frac{-4}{x}\right)^2=0$

$x^2-\frac{16}{x^2}=0\ ]\times x^2$

$x^4-16=0$ فرق بين مربعين

$(x^2-4)(x^2+4)=0$

يهمل

$x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$

$x=2\ ,\ y=\frac{-4}{2}=-2$

$x=-2\ ,\ y=\frac{-4}{-2}=2$

الجذور $\therefore\ 2-2i\ ,\ -2+2i$

نقوم بتعويض احد الجذور في معادلة الدستور

سيا واجب حل المعادلات الآتية

① $x^2-x-1+3i=0$ $\qquad [-1+i\ ,\ 2-i]$:ج

② $x^2-(5-i)x+12-5i=0$ $\qquad [2-3i\ ,\ 3+2i]$:ج

③ $x^2-(2+2i)x-1+2i=0$ $\qquad [i\ ,\ 2+i]$:ج

③ $x^2+4x+5=0$

$a=1,\ b=4,\ c=5$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{(4)^2-4(1)(5)}}{2(1)}=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}$$

* اذا كانت القيم داخل الجذر لا تحتوي على i نقوم بإنهاء الحل بعد التبسيط.

$$x=\frac{-4\pm 2i}{2}=\frac{-4}{2}\pm\frac{2i}{2}=-2\pm i$$

$\therefore S=\{-2+i,\ -2-i\}$ الجذران مترافقان

---

④ $2Z^2-5Z+13=0$

$a=2,\ b=-5,\ c=13$

$$Z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4(2)(13)}}{2(2)}=\frac{5\pm\sqrt{25-104}}{4}$$

$$Z=\frac{5\pm\sqrt{-79}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{79}\,i}{4}=\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{79}}{4}i$$

$\therefore S=\left\{\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{79}}{4}i,\ \frac{5}{4}-\frac{\sqrt{79}}{4}i\right\}$ الجذران مترافقان

---

⑤ $Z^2-2Zi+3=0$

$a=1,\ b=-2i,\ c=3$

$$Z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2i\pm\sqrt{(-2i)^2-4(1)(3)}}{2(1)}=\frac{2i\pm\sqrt{4i^2-12}}{2}=\frac{2i\pm\sqrt{-4-12}}{2}$$

$$Z=\frac{2i\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{2i\pm 4i}{2}=\frac{2i}{2}\pm\frac{4i}{2}=i\pm 2i$$

$Z=i+2i=3i$

$Z=i-2i=-i$

$\therefore S=\{3i,\ -i\}$ الجذران غير مترافقان

طريقة أسرع للحل

$Z^2-2Zi+3=0$

$Z^2-2Zi-3i^2=0 \Rightarrow (Z-3i)(Z+i)=0$ (تجربة)

$Z-3i=0 \Rightarrow Z=3i$

$Z+i=0 \Rightarrow Z=-i$

$\therefore S=\{3i,\ -i\}$

⑥ $Z^2=-12$

* اذا كانت المعادلة تتكون من حدين نقوم بجذر الطرفين

$Z=\pm\sqrt{-12}$

$Z=\pm\sqrt{12}\,i \Rightarrow Z=\pm 2\sqrt{3}\,i$, $S=\{2\sqrt{3}\,i , -2\sqrt{3}\,i\}$ الجذران مترافقان

⑦ $4Z^2+25=0$

$4Z^2=-25 \Rightarrow Z^2=\frac{-25}{4} \Rightarrow Z=\pm\sqrt{\frac{-25}{4}} \Rightarrow Z=\pm\frac{5}{2}i$

$S=\{\frac{5}{2}i , -\frac{5}{2}i\}$ الجذران مترافقان

س/ واجب حل المعادلات الآتية

① $x^2+4x+8=0$ — ج = $[-2-2i , -2+2i]$

② $3x^2-2\sqrt{3}x+5=0$ — ج = $[\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}i , \frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}i]$

* تكوين معادلة تربيعية اذا علم جذراها

① نقوم بجعل الجذور بالصيغة العادية اذا كانا كسور في مقامه i او قوس ذو أس

② نقوم بجمع الجذرين

③ نقوم بضرب الجذرين .

④ نطبق القاعدة

x^2-(مجموع الجذرين)$x+$(ضرب الجذرين)$=0$

س/ كون المعادلات التي جذراها

① $L=1-i$, $M=1+2i$

$L+M=(1-i)+(1+2i)=2+i$

مجموع الجذرين.

$L\cdot M=(1-i)(1+2i)=1+2i-i-2i^2=1+2i-i+2=3+i$

ضرب الجذرين

x^2-(مجموع الجذرين)$x+$(ضرب الجذرين)$=0$

$x^2-(2+i)x+(3+i)=0$ معادلة تربيعية

② $L=(3-2i)^2$, $M=\frac{3-i}{1+i}$

$L=(3-2i)^2=9-12i+4i^2=9-12i-4=5-12i$ جذر أول

$M=\frac{3-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{3-3i-i+i^2}{1+1}=\frac{3-3i-i-1}{2}=\frac{2-4i}{2}=\frac{2}{2}-\frac{4i}{2}$

$=1-2i$ جذر ثاني

$L+M=(5-12i)+(1-2i)=6-14i$ المجموع

$L\cdot M=(5-12i)(1-2i)=5-10i-12i+24i^2=5-10i-12i-24$

$=-19-22i$ الضرب

x^2-(مجموع الجذرين)$x+$(ضرب الجذرين)$=0$

$x^2-(6-14i)x+(-19-22i)=0$ معادلة تربيعية

س/ جد المعادلة التربيعية التي جذراها $\pm(2+2i)$

جذر أول $2+2i$ ، جذر ثاني $-2-2i$

مجموع الجذرين $=(2+2i)+(-2-2i)=0$ المجموع

ضرب الجذرين $=(2+2i)(-2-2i)=-4-4i-4i-4i^2=-4-4i-4i+4$

$=-8i$ الضرب

x^2-(جمع الجذرين)$x+$(ضرب الجذرين)$=0$

$x^2-(0)x+(-8i)=0 \Rightarrow x^2-8i=0$ معادلة تربيعية

---

* ملاحظة: اذا كانت معاملات المعادلة حقيقية واحد جذريها العدد المركب $a+bi$ فأن الجذر الثاني يكون مرافقاً له $a-bi$

س/ كون المعادلات التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي أحد جذريها هو

---

① $3-4i$

بما أن معاملات المعادلة حقيقية وأحد جذريها $3-4i$

∴ الجذر الاخر هو المرافق له وهو $3+4i$

مجموع الجذرين $=(3-4i)+(3+4i)=6$ المجموع

ضرب الجذرين $=(3-4i)(3+4i)=9+16=25$ الضرب

(عدد) (مرافقه)

x^2-(مجموع الجذرين)$x+$(ضرب الجذرين)$=0$

$x^2-6x+25=0$ معادلة تربيعية معاملاتها حقيقية (خالية من i)

---

② i

بما أن معاملات المعادلة حقيقية وأحد جذريها i

∴ الجذر الاخر هو المرافق له وهو $-i$

مجموع الجذرين $=(i)+(-i)=0$ المجموع

ضرب الجذرين $=(i)(-i)=1$ الضرب

x^2-(مجموع الجذرين)$x+$(ضرب الجذرين)$=0$

$x^2-(0)x+1=0$

$x^2+1=0$ معادلة تربيعية

③ $\frac{\sqrt{2}+3i}{4}$

بما أن المعاملات حقيقية وأحد جذريها $\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3i}{4}$

∴ الجذر الآخر يكون مرافق له وهو $\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{3i}{4}$

مجموع الجذرين $=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3i}{4}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{3i}{4}\right)$

المجموع $=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

الضرب: ضرب الجذرين $=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3i}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{3i}{4}\right)=\frac{2}{16}+\frac{9}{16}=\frac{11}{16}$ (عدد × مرافقه)

x^2- (جمع الجذرين) $x+$ (ضرب الجذرين) $=0$

$x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{11}{16}=0$ معادلة تربيعية

س/ واجب كون المعادلات التربيعية التي جذراها

① $L=\frac{13-i}{4+i}, m=\frac{7-i}{2-i}$ ج: $[x^2-6x+10=0]$

② $L=\frac{1+3i}{1+i}, m=\frac{1+7i}{3+i}$ ج: $[x^2-(3+3i)x+5i=0]$

س/ واجب كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذريها $\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$ ج: $[x^2+x+1=0]$

✱ **ملاحظة:** من خلال قانون المعادلة التربيعية

x^2- (مجموع الجذرين) $x+$ (ضرب الجذرين) $=0$

ممكن أن نستنتج

الحد المطلق (الخالي من x) = ضرب الجذرين | معامل x بعكس الإشارة = مجموع الجذرين

نستخدم هاتين الاستنتاجين عندما يكون أحد الجذرين مجهول أو إيجاد ثابت في معادله تربيعية.

ملاحظة مهمة جداً: لا يمكن تطبيق الاستنتاجين إلا إذا كان معامل x^2 يساوي واحد وإن لم يكن يجب تقسيم المعادلة على معامل x^2

س/ اذا كان $3+i$ هو أحد جذري المعادلة $x^2 - a x + (5+5i) = 0$ فما قيمة $a \in \mathbb{C}$ وما هو الجذر الآخر.

نفرض الجذر الآخر L ، جذر الاول $= 3+i$

الحد المطلق = ضرب الجذرين

$(3+i) \cdot L = 5+5i$

$L = \frac{5+5i}{3+i}$

$L = \frac{5+5i}{3+i} \times \frac{3-i}{3-i}$

$L = \frac{15-5i+15i+5}{9+1}$

$L = \frac{20+10i}{10} = \frac{20}{10} + \frac{10i}{10}$

جذر آخر $L = 2+i$ نعوض قيمة L في معادلة ①

معامل x بعكس الاشارة = مجموع الجذرين

$(3+i) + L = a$ .... ①

$(3+i) + (2+i) = a$

قيمة a $\quad \therefore a = 5+2i$

س/ اذا كان $(1+2i)$ هو أحد جذري المعادلة $x^2 - (3-i)x + b = 0$ فما قيمة $b \in \mathbb{C}$ وما هو الجذر الآخر.

نفرض الجذر الآخر L ، جذر الاول $= 1+2i$

معامل x بعكس الاشارة = مجموع الجذرين

$(1+2i) + L = (3-i)$

$L = (3-i) - (1+2i)$

$L = (3-i) + (-1-2i)$

جذر آخر $L = 2-3i$ نعوض قيمة L في معادلة ①

الحد المطلق = ضرب الجذرين

$(1+2i) \cdot L = b$ ------ ①

$(1+2i) \cdot (2-3i) = b$

$2-3i+4i+6 = b$

قيمة b $\quad \therefore b = 8+i$

واجب س/ اذا كان $(3+i)$ هو أحد جذري المعادلة $x^2 - (4-i)x + c = 0$ فما قيمة c وما هو الجذر الآخر

$[L = 1-2i \,,\, c = 5-5i] = $ ج.

س/ اذا كان $3-4i$ هو أحد جذري المعادلة $x^2 - bx + (10-5i) = 0$ فما هو الجذر الآخر وما قيمة b

$[L = 2+i \,,\, b = 5-3i] = $ ج.

س/ اذا كان $3+4i$ هو أحد جذري المعادلة $2x^2 - 2ax + 50 = 0$ فما هو الجذر الآخر وما قيمة a

$[L = 3-4i \,,\, a = 6] = $ ج.

* نقوم بقسمة المعادلة على معامل x^2 وهو 2 ثم نطبق الاستنتاجين.

س٤ / ٢٠١٥ اذا كان $(2-4i)$ هو أحد جذري المعادلة $2x^2-x-bx+c-6=0$ معاملاتها حقيقية جد $b,c\in R$.

$$2x^2-x-bx+c-6=0$$
$$2x^2-x(1+b)+c-6=0$$
$$2x^2-(1+b)x+c-6=0\ ]\div 2$$ يجب أن يكون معامل x^2 يساوي واحد .
$$x^2-\frac{(1+b)}{2}x+\frac{(c-6)}{2}=0$$

بما أن معاملات المعادله حقيقية وأحد جذريها $2-4i$

$\therefore$ الجذر الآخر يكون مرافق له وهو $2+4i$

معامل x بعكس الاشارة = مجموع الجذرين

$$(2-4i)+(2+4i)=\frac{1+b}{2}$$
$$4=\frac{1+b}{2}$$
$$1+b=8$$
$$b=7$$

الحد المطلق = ضرب الجذرين

$$(2-4i)(2+4i)=\frac{c-6}{2}$$
(عدد) (مرافقه)
$$4+16=\frac{c-6}{2}$$
$$20=\frac{c-6}{2}$$
$$c-6=40\Rightarrow c=46$$

طريقة أخرى لحل السؤال اعلاه

بما أن $2-4i$ هو أحد جذري المعادله

$\therefore$ يحقق المعادلة التي يتبعها اي نعوضه في المعادلة في x

$$2(2-4i)^2-(2-4i)-b(2-4i)+c-6=0$$
$$2(4-16i-16)-2+4i-2b+4ib+c-6=0$$
فكرة التساوي
$$8-32i-32-2+4i-2b+4ib+c-6=0$$
حقيقي = حقيقي
$$8-32-2-2b+c-6=0$$
$$-32-2b+c=0\Rightarrow -2b+c=32 \quad ----①$$
تخيلي = تخيلي
$$-32+4+4b=0$$
نعوض قيمة b في ①
$$-28+4b=0\Rightarrow 4b=28\Rightarrow b=7$$
$$\therefore\ -2(7)+c=32\Rightarrow -14+c=32\Rightarrow c=46.$$

واجب
س / اذا كان $1-2i$ هو أحد جذري المعادلة $2x^2-2x-bx+a-7=0$ جد $a,b\in R$

$[a=17,\ b=2\ ]=2.$

* الجذور التكعيبية للواحد الصحيح .

ليكن $Z^3=1$

فرق بين مكعبين . $Z^3-1=0 \Rightarrow (Z-1)(Z^2+Z+1)=0$

اما $Z-1=0 \Rightarrow Z=1$

او $Z^2+Z+1=0$ تحل بقانون الدستور

$$Z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

$$Z=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}=\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح $\therefore S=\left\{1,\ \frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

① الجذران التخيليان مترافقان

② مجموع الجذور الثلاث = صفر $1+\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=0$

③ حاصل ضرب الجذرين التخيليين = 1 $\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

(عدد ، مرافقه)

④ مربع أحد الجذرين التخيليين = الجذر الآخر $\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}i}{2}-\frac{3}{4}$

جمع الحدين

$$=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

من خلال الخواص اعلاه ممكن الاستنتاج

① حسب الخاصية ④ لو رمزنا لأحد الجذرين التخيليين بالرمز ω فأن الجذر الآخر ω^2 والعكس صحيح

② حسب الخاصية ③ $\omega\times\omega^2=1 \Rightarrow \omega^3=1$

③ حسب الخاصية ② $1+\omega+\omega^2=0 \Rightarrow$

- $1+\omega=-\omega^2$
- $1+\omega^2=-\omega$
- $\omega+\omega^2=-1$

قوى ω

* أن اعلى أس يستخدم في الحل هو ω^2 فاذا كان الاس اكبر من العدد 2 يجب تقليل الاس وذلك بقسمة الاس على العدد 3 ونأخذ الباقي فقط.

① فاذا كان ناتج القسمة بدون باقي فان الجواب يكون واحد — Ex $\omega^6=1$

② فاذا كان باقي القسمة هو العدد واحد الجواب يكون ω — Ex $\omega^4=\omega$

③ فاذا كان باقي القسمة هو العدد اثنان الجواب يكون ω^2 — Ex $\omega^5=\omega^2$

* **ملاحظة:**

اذا كان الاس اكبر من العدد 9
نقوم بجمع الاس ثم القسمة على 3 ونأخذ الباقي

Ex

① $\omega^{13}=\omega^4=\omega$ — باقي القسمة $1+3=4\div3=1$

② $\omega^{71}=\omega^8=\omega^2$ — باقي القسمة $7+1=8\div2=2$

③ $\omega^{2016}=\omega^9=1$ — لا يوجد باقي $2+0+1+6=9\div3=$

ممكن الاستنتاج أن مضاعفات العدد 3 = 1 — $\omega^{3n}=1 \quad , n\in Z$

---

* ملاحظة: عند وجود كسر يحتوي في مقامه على حد واحد منه ω^n وفي البسط عدد بهيئة $\left(\frac{\text{عدد}}{\omega^n}\right)$ لاحد واحد

① نقوم بتقليل قوى ω في المقام اذا كانت اكبر من 2

② نضرب البسط في ω^3

③ الاختصار بين البسط والمقام

Ex

① $\frac{5}{\omega^2}=\frac{5\cdot\omega^3}{\omega^2}=5\omega$

② $\frac{3}{\omega}=\frac{3\times\omega^3}{\omega}=3\omega^2$

③ $\frac{4}{\omega^{23}}=\frac{4}{\omega^5}=\frac{4\times\omega^3}{\omega^2}=4\omega$

④ $\omega^{-4}=\frac{1}{\omega^4}=\frac{1\cdot\omega^3}{\omega}=\omega^2$

ملاحظة اذا كانت ω او قوى عبارة عن حدودية

① نقلل قوى ω اذا كانت اكبر من 2

② نتخلص من الكسر الذي يكون بهيئة $\frac{\text{عدد}}{\omega^n}$

③ نحاول أن نجد أحد استنتاجات فروع القانون أساسا مباشر او بإخراج عامل مشترك بين حدين بنفس العدد والاشارة

$$1+\omega+\omega^2=0 \Rightarrow \begin{cases} 1+\omega=-\omega^2 \\ 1+\omega^2=-\omega \\ \omega+\omega^2=-1 \end{cases}$$

س١ اكتب المقادير الآتية بأبسط صورة

① $5+\omega+\omega^2$ (قانون)

$=5+(-1)=5-1=4$

② $2\omega+\omega^2+1$ (قانون)

$=2\omega+(-\omega)=2\omega-\omega=\omega$

③ $1+2\omega^2+\omega$

$=2\omega^2+1+\omega$ اعادة ترتيب (قانون)

$=2\omega^2+(-\omega^2)=2\omega^2-\omega^2=\omega^2$

④ $6\omega+5+5\omega^2$

$=6\omega+5(1+\omega^2)$ عامل مشترك بين حدين بنفس القيمة العددية والاشارة

$=6\omega+5(-\omega)=6\omega-5\omega=\omega$

⑤ $2-3\omega-3\omega^2$

$=2-3(\omega+\omega^2)=2-3(-1)=2+3=5$

س٢ اثبت أن $(1+\omega^{31})^{12}=1$

* عند وجود قوس مرفوع إلى قوى

① نقوم بتقليل قوى ω اذا كانت اكبر من 2

② نتخلص من الكسور التي تكون بصيغة $\frac{عدد}{\omega^n}$

③ نستعين بالاستنتاجات للقانون $1+\omega+\omega^2=1$

④ نحاول أن نجعل داخل القوس حد واحد أن امكن .

Sol

$=(1+\omega^{31})^{12}=(1+\omega^4)^{12}$

أيسر $=(1+\omega)^{12}$ (قانون)

$=(-\omega^2)^{12}=\omega^{24}=\omega^6=1$ أيمن

س٣ اثبت أن $\frac{1}{(1+\omega^{-32})^{12}}=1$

Sol $=\frac{1}{(1+\frac{1}{\omega^{32}})^{12}}=\frac{1}{(1+\frac{1}{\omega^5})^{12}}=\frac{1}{(1+\frac{1}{\omega^2})^{12}}=\frac{1}{(1+\frac{\omega^3}{\omega^2})^{12}}$

$=\frac{1}{(1+\omega)^{12}}=\frac{1}{(-\omega^2)^{12}}=\frac{1}{\omega^{24}}=\frac{1}{\omega^6}=\frac{1}{1}=1$ (قانون)

س/ أثبت أن $(5+3\omega+3\omega^2)^2=-4(2+\omega+2\omega^2)^3=4$

$(5+3\omega+3\omega^2)^2$

$=[5+3(\omega+\omega^2)]^2$ قانون

$=[5+3(-1)]^2$

$=(5-3)^2$

$=(2)^2=4$

اعادة ترتيب $=-4(2+2\omega^2+\omega)^3$

$=-4[2(1+\omega^2)+\omega]^3$ قانون

$=-4[2(-\omega)+\omega]^3=-4(-2\omega+\omega)^3$

$=-4(-\omega)^3=-4(-\omega^3)$

$=-4(-1)=4$

س/ اثبت أن $\frac{2014}{1د}$ $(1-\frac{2}{\omega^2}+\omega^2)(1+\omega-\frac{5}{\omega})=18$

$=(1-\frac{2\cdot\omega^3}{\omega^2}+\omega^2)(1+\omega-\frac{5\cdot\omega^3}{\omega})$

$=(1-2\omega+\omega^2)(1+\omega-5\omega^2)$

$=(\underbrace{1+\omega^2}_{\text{قانون}}-2\omega)(\underbrace{1+\omega}_{\text{قانون}}-5\omega^2)$

$=(-\omega-2\omega)(-\omega^2-5\omega^2)$

$=(-3\omega)(-6\omega^2)=18\omega^3=18(1)=18$

س/ اثبت أن $(1+\omega^2)^3+(1+\omega)^3=-2$

$=(1+\omega^2)^3+(1+\omega)^3$ قانون قانون

$=(-\omega)^3+(-\omega^2)^3$

$=(-\omega^3)+(-\omega^6)=(-1)+(-1)=-2$

س/ اثبت أن $\frac{\omega^{14}+\omega^7-1}{\omega^{10}+\omega^5-2}=\frac{2}{3}$

$\frac{\omega^2+\omega-1}{\omega+\omega^2-2}=\frac{(\omega^2+\omega)-1}{(\omega+\omega^2)-2}$ قانون

$=\frac{-1-1}{-1-2}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$

س/ اثبت أن د١/٢٠١١ د٢/٢٠١٣

$$\left(\frac{1}{2+w}-\frac{1}{2+w^2}\right)^2=\frac{-1}{3}$$

نقوم بتوحيد المقامات لأنه لم يكن المقام يعطي قانون مباشر

$$=\left(\frac{1(2+w^2)-1(2+w)}{(2+w)(2+w^2)}\right)^2$$

$$=\left(\frac{2+w^2-2-w}{4+2w^2+2w+w^3}\right)^2$$

$$=\left(\frac{w^2-w}{4+2(w^2+w)+1}\right)^2=\left(\frac{w^2-w}{5+2(-1)}\right)^2=\left(\frac{w^2-w}{5-2}\right)^2=\left(\frac{w^2-w}{3}\right)^2$$

نقوم بتوزيع الاس على البسط والمقام

$$=\frac{(w^2-w)^2}{3^2}=\frac{w^4-2w^3+w^2}{9}=\frac{w+w^2-2(1)}{9}=\frac{-1-2}{9}=\frac{-3}{9}=\frac{-1}{3}$$

(قانون 2)

س/ اكتب المقدار الآتي في ابسط صورة

$$5w^2+6w+8$$

ملاحظة: عند وجود حدوديه ثلاثية فأكثر ولم توجد احد استنتاجات القانون لتقليل عدد الحدود نقوم بتحويل $w^2=-1-w$ ثم نفتح القوس ونجمع الحدود المتشابهه

$$=5w^2+6w+8$$

$$=5(-1-w)+6w+8$$

$$=-5-5w+6w+8$$

$$=w+1$$

س/ جد ناتج عامة ٢٠١٥/د٣

$$\left(3w^{9n}+\frac{5}{w^5}+\frac{4}{w^4}\right)^6,\ n\in Z$$

$$=\left(3+\frac{5}{w^2}+\frac{4}{w}\right)^6$$

$$=\left(3+\frac{5\times w^3}{w^2}+\frac{4\times w^3}{w}\right)^6=\left(3+5w+4w^2\right)^6$$

ملاحظة اعلاه

$$=\left[3+5w+4(-1-w)\right]^6=\left(3+5w-4-4w\right)^6=(w-1)^6$$

نجمع الحدود المتشابهه

$$=\left[(w-1)^2\right]^3=\left[w^2-2w+1\right]^3=\left(w^2+1-2w\right)^3$$

$$=(-w-2w)^3=(-3w)^3=-27w^3=-27(1)=-27$$

س/ اذا كان $Z^2+Z+1=0$ فجد قيمة $\dfrac{1+3Z^{10}+3Z^{11}}{1-3Z^7-3Z^8}$

نجد حل المعادلة التربيعية بقانون الدستور $Z^2+Z+1=0$

$a=1, b=1, c=1$

$$Z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

$$Z=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}=\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \longrightarrow$$ ∴ Z تمثل ω أو ω^2

<u>اولاً</u> عندما $Z=\omega$

$$Z=\omega=\frac{1+3\omega^{10}+3\omega^{11}}{1-3\omega^{7}-3\omega^{8}}=\frac{1+3\omega+3\omega^2}{1-3\omega-3\omega^2}=\frac{1+3(\omega+\omega^2)}{1-3(\omega+\omega^2)}$$

$$=\frac{1+3(-1)}{1-3(-1)}=\frac{1-3}{1+3}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

<u>ثانياً</u> عندما $Z=\omega^2$

$$Z=\omega^2=\frac{1+3(\omega^2)^{10}+3(\omega^2)^{11}}{1-3(\omega^2)^{7}-3(\omega^2)^{8}}=\frac{1+3\omega^{20}+3\omega^{22}}{1-3\omega^{14}-3\omega^{16}}=\frac{1+3\omega^2+3\omega}{1-3\omega^2-3\omega}$$

$$=\frac{1+3(\omega^2+\omega)}{1-3(\omega^2+\omega)}=\frac{1+3(-1)}{1-3(-1)}=\frac{1-3}{1+3}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

س/ اثبت أن $\dfrac{2+\omega}{1+3\omega}+\dfrac{2+\omega^2}{1+3\omega^2}=\dfrac{3}{7}$

$$\frac{2+\omega}{1+3\omega}+\frac{2+\omega^2}{1+3\omega^2}=\frac{(2+\omega)(1+3\omega^2)+(2+\omega^2)(1+3\omega)}{(1+3\omega)(1+3\omega^2)}$$ نوحد المقامات

$$=\frac{2+6\omega^2+\omega+3\omega^3+2+6\omega+\omega^2+3\omega^3}{1+3\omega^2+3\omega+9\omega^3}$$ نجمع الحدود المتشابهة في البسط والمقام

$$=\frac{2+3+2+3+7\omega^2+7\omega}{1+9+3(\omega^2+\omega)}=\frac{10+7(\omega^2+\omega)}{10+3(-1)}=\frac{10+7(-1)}{10-3}=\frac{10-7}{7}=\frac{3}{7}$$

2015 / د1

س: جد قيمة x, y اذا كان $(x+iy)(1-\sqrt{-3}) = -2\omega - 2\omega^2$

$$(x+iy)(1-\sqrt{3}i) = -2(\underbrace{\omega+\omega^2}_{-1})$$

$$(x+iy)(1-\sqrt{3}i) = 2$$

لايجاد قيم x, y يجب أن تكون المعادله خاليه من الاقواس والكسور ومن قوى i التي تكون اكبر من واحد ثم نطبق فكرة التساوي .

$$x+iy = \frac{2}{1-\sqrt{3}i}$$

$$x+iy = \frac{2}{1-\sqrt{3}i} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

$$x+iy = \frac{2+2\sqrt{3}i}{1+3}$$

$$x+iy = \frac{2+2\sqrt{3}i}{4}$$

$$x+iy = \frac{2}{4} + \frac{2\sqrt{3}i}{4}$$

$$x+iy = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$ نطبق فكرة التساوي

$$x = \frac{1}{2} \ , \ y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

س/ع اثبت أن $\left(\frac{1}{3+4\omega+5\omega^2}-\frac{1}{3+5\omega+4\omega^2}\right)^2=\frac{-1}{3}$

$$=\left[\frac{1}{3+4\omega+5(-1-\omega)}-\frac{1}{3+5\omega+4(-1-\omega)}\right]^2$$

$$=\left[\frac{1}{3+4\omega-5-5\omega}-\frac{1}{3+5\omega-4-4\omega}\right]^2$$

$$=\left[\frac{1}{-2-\omega}-\frac{1}{\omega-1}\right]^2=\left(\frac{1(\omega-1)-1(-2-\omega)}{(-2-\omega)(\omega-1)}\right]^2$$

$$=\left[\frac{\omega-1+2+\omega}{-2\omega+2-\omega^2+\omega}\right]^2=\left[\frac{2\omega+1}{2-\omega^2-\omega}\right]^2=\left[\frac{2\omega+1}{2-(\omega^2+\omega)}\right]^2$$

تانوي

$$=\left[\frac{2\omega+1}{2-(-1)}\right]^2=\left[\frac{2\omega+1}{2+1}\right]^2=\left[\frac{2\omega+1}{3}\right]^2=\frac{(2\omega+1)^2}{3^2}=\frac{4\omega^2+4\omega+1}{9}$$

$$\frac{4(\omega^2+\omega)+1}{9}=\frac{4(-1)+1}{9}=\frac{-4+1}{9}=\frac{-3}{9}=\frac{-1}{3}$$

س واجب / اثبت كلاً من

① $(3+4\omega+3\omega^2)^3=(3+4\omega^2+3\omega)^3=1$

② $\frac{1}{3+5\omega+4\omega^2}+\frac{1}{3+4\omega+5\omega^2}=-1$

③ $\frac{2}{3+\omega^8}+\frac{2}{\omega^{16}+3}=\frac{10}{7}$

④ $\sqrt{\frac{4}{\omega}+\frac{4}{\omega^2}}=2i$

⑤ $(1-\omega)(1-\omega^4)(1-\omega^2)(1-\omega^5)=9$

⑥ $2+\sqrt{\omega}-\frac{4}{\omega}-\frac{3}{\omega^2}=5$

⑦ $\left[\frac{\omega^2}{1-2\omega}-\frac{\omega}{1-2\omega^2}\right]^2=\frac{-27}{49}$

⑧ $3(\omega^{14}+\omega^7-1)=2(\omega^{10}+\omega^5-2)=-6$

⑨ $\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega^2}\right)^2\left(2+\frac{2}{\omega}\right)\left(\frac{-1}{1+\omega^2}\right)=6$

ملاحظة:

① $\sqrt{\omega}=\omega^2$

② $\sqrt{\omega^2}=\omega$

* ايجاد معادلة تربيعية $x^2 -$ (جمع الجذرين) $x +$ (ضرب الجذرين) $= 0$

س/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $1+\omega^2 \;,\; 1+\omega$

مجموع الجذرين $= (1+\omega^2) + (1+\omega)$ (قانون) (قانون)

$= -\omega + (-\omega^2) = -\omega - \omega^2$

$= -(\omega + \omega^2) = -(-1) = 1$

ضرب الجذرين $= (1+\omega^2)(1+\omega)$

$= (-\omega)(-\omega^2) = \omega^3 = 1$

$x^2 -$ (جمع الجذرين) $x +$ (ضرب الجذرين) $= 0$

$x^2 - x + 1 = 0$ المعادلة التربيعية

س/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $1 - i\omega^2 \;,\; 1 - i\omega$

مجموع الجذرين $= (1 - i\omega^2) + (1 - i\omega)$

$= 2 - i\omega^2 - i\omega$ ($-i$) عامل مشترك نفس العدد والاشارة

$= 2 - i(\omega^2 + \omega) = 2 - i(-1) = 2 + i$

ضرب الجذرين $= (1 - i\omega^2)(1 - i\omega)$

$= 1 - i\omega - i\omega^2 + i^2\omega^3$

$= \cancel{1} - i(\omega + \omega^2) \cancel{-1} = -i(-1) = i$

$x^2 -$ (جمع الجذرين) $x +$ (ضرب الجذرين) $= 0$

$x^2 - (2+i)x + i = 0$ معادلة تربيعية

س/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $\frac{3i}{\omega^2} \;,\; \frac{-3\omega^2}{i}$

2011 / د2

نهيأ الجذرين $\frac{3i}{\omega^2} = \frac{3i\omega^3}{\omega^2} = 3i\omega$ جذر أول

$\frac{-3\omega^2}{i} = \frac{-3\omega^2}{i} \times \frac{-i}{-i} = \frac{3i\omega^2}{1} = 3i\omega^2$ جذر ثاني

مجموع الجذرين $= 3i\omega + 3i\omega^2 = 3i(\omega + \omega^2) = 3i(-1) = -3i$

ضرب الجذرين $= (3i\omega)(3i\omega^2) = 9i^2\omega^3 = 9(-1)(1) = -9$

$x^2 -$ (مجموع الجذرين) $x +$ (ضرب الجذرين) $= 0 \rightarrow x^2 + 3ix - 9 = 0$ معادلة تربيعية

س/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها . $\frac{2}{1-\omega} , \frac{2}{1-\omega^2}$

مجموع الجذرين $= \frac{2}{1-\omega} + \frac{2}{1-\omega^2} = \frac{2(1-\omega^2)+2(1-\omega)}{(1-\omega)(1-\omega^2)}$

نوحد مقامات

$= \frac{2-2\omega^2+2-2\omega}{1-\omega^2-\omega+\omega^3} = \frac{4-2\omega^2-2\omega}{1-(\omega^2+\omega)+1} = \frac{4-2(\omega^2+\omega)}{2-(-1)}$

$= \frac{4-2(-1)}{2+1} = \frac{4+2}{3} = \frac{6}{3} = 2$

ضرب الجذرين $= \frac{2}{1-\omega} \cdot \frac{2}{1-\omega^2} = \frac{4}{1-\omega^2-\omega+\omega^3} = \frac{4}{1-(\omega^2+\omega)+1}$

$= \frac{4}{2-(-1)} = \frac{4}{2+1} = \frac{4}{3}$

$x^2 -$ (مجموع الجذرين) $x +$ (ضرب الجذرين) $= 0$

$x^2 - 2x + \frac{4}{3} = 0$ معادلة تربيعية.

س/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $\frac{\omega}{2-\omega^2} , \frac{\omega^2}{2-\omega}$

مجموع الجذرين $= \frac{\omega}{2-\omega^2} + \frac{\omega^2}{2-\omega} = \frac{\omega(2-\omega)+\omega^2(2-\omega^2)}{(2-\omega^2)(2-\omega)}$

$= \frac{2\omega-\omega^2+2\omega^2-\omega^4}{4-2\omega-2\omega^2+\omega^3} = \frac{2\omega-\omega^2+2\omega^2-\omega}{4-2(\omega+\omega^2)+1}$ نجمع الحدود المتشابهة

$= \frac{\omega+\omega^2}{5-2(-1)} = \frac{-1}{5+2} = \frac{-1}{7}$

ضرب الجذرين $= \frac{\omega}{2-\omega^2} \cdot \frac{\omega^2}{2-\omega} = \frac{\omega^3}{4-2\omega-2\omega^2+\omega^3}$

$= \frac{1}{4-2(\omega+\omega^2)+1} = \frac{1}{5-2(-1)} = \frac{1}{5+2} = \frac{1}{7}$

$x^2 -$ (مجموع الجذرين) $x +$ (ضرب الجذرين) $= 0$

$x^2 + \frac{1}{7}x + \frac{1}{7} = 0$ معادلة تربيعية

س/ كون المعادلات التربيعية الآتية اذا علمت جذراها.

① $\frac{97}{1}$ $(2\omega+2\omega^2-1)^2, (2-2\omega-2\omega^2)^2$ ج. $= [x^2-25x+144=0]$

② $\frac{98}{1}$ $(2i\omega^2-\omega), (2i\omega-\omega^2)$ ج. $= [x^2-(1-2i)x+(-3+2i)=0]$

③ $\frac{99}{1}$ $(2\omega i-\frac{3\omega^2}{i}), (3\omega i-\frac{2\omega^2}{i})$ ج. $= [x^2+5ix-7=0]$

④ $\frac{2001}{2}$ $(3\omega-2i), (3\omega^2-2i)$ ج. $= [x^2-(-3-4i)x+(5+6i)=0]$

⑤ $\frac{2002}{1}$ $(2-3i\omega^2), (2-3i\omega)$ ج. $= [x^2-(4+3i)x+(-5+6i)=0]$

⑥ $\frac{2004}{1}$ $(i-\frac{5}{\omega}), (i-\frac{5}{\omega^2})$ ج. $= [x^2-(5+2i)x+(24+5i)=0]$

⑦ $\frac{2005}{1}$ $(i-\frac{3}{\omega}), (i-\frac{3}{\omega^2})$ ج. $= [x^2-(3+2i)x+(8+3i)=0]$

⑧ $\frac{2006}{1}$ $(5+2i\omega^2), (5+2i\omega)$ ج. $= [x^2-(10-2i)x+(21-10i)=0]$

⑨ $\frac{2006}{2}$ $(3-2i\omega^2), (3-2i\omega)$ ج. $= [x^2-(6+2i)x+(5+6i)=0]$

⑩ $\frac{2007}{2}$ $(1+\omega), (1+\omega^2)$ ج. $= [x^2-x+1=0]$

⑪ $\frac{2008}{1}$ $(3\omega^2+\frac{i}{\omega^2}), (3\omega+\frac{i}{\omega})$ ج. $= [x^2-(-3-i)x+(8-3i)=0]$

⑫ $\frac{2011}{2014}$ $(\frac{3i}{\omega^2}), (\frac{-3\omega^2}{i})$ ج. $= [x^2+3ix-9=0]$

⑬ $\frac{2014}{=}$ $(\frac{\omega}{3-\omega^2}), (\frac{\omega^2}{3-\omega})$ ج. $= [x^2+\frac{2}{13}x+\frac{1}{13}=0]$

س/ جد قيمة كلاً مما يأتي

ملاحظة: في حالة الاتفاق البسط والمقام في

① عدد الحدود ② المعاملات بأشاراتها

نقوم بوضع ω^3 الى الحد الخالي من ω في البسط أو في المقام و الافضل وضعه في البسط ثم اخراج عامل مشترك ω أو ω^2 حسب السؤال ثم الاختصار

① $\frac{2-5\omega}{2\omega^2-5}$

$= \frac{2\cdot\omega^3-5\omega}{2\omega^2-5} = \frac{\omega(2\omega^2-5)}{2\omega^2-5} = \omega$

② $\frac{7\omega^2+3}{7+3\omega}$

$= \frac{7\omega^2+3\omega^3}{7+3\omega} = \frac{\omega^2(7+3\omega)}{7+3\omega} = \omega^2$

③ $\frac{1+2\omega-3\omega^2}{2-3\omega+\omega^2}$

$\frac{1+2\omega-3\omega^2}{\omega^2+2-3\omega} = \frac{1\cdot\omega^3+2\omega-3\omega^2}{\omega^2+2-3\omega} = \frac{\omega(\omega^2+2-3\omega)}{\omega^2+2-3\omega} = \omega$

2014 د٢

س/ أثبت أن $\left(\frac{5\omega^2 i - 1}{5 + i\omega}\right)^6 = -1$

نقوم بوضع i^2 ثم نضع ω^3

$$= \left(\frac{5\omega^2 i + i^2}{5 + i\omega}\right)^6 = \left(\frac{5\omega^2 i + i^2\omega^3}{5 + i\omega}\right)^6$$

$$= \left[\frac{i\omega^2(5 + i\omega)}{5 + i\omega}\right]^6 = (i\omega^2)^6 = (i^6\omega^{12}) = i^2\omega^3 = (-1)(1) = -1$$

واجب

س/ أثبت كلاً من

① $\left(\frac{3+\omega}{3\omega^2+1} - \frac{7-\omega^2}{7\omega-1}\right)^2 = -3$

② $\left(\frac{a+b\omega^2}{a\omega+b} - \frac{d-c\omega}{d\omega^2-c}\right)^4 = 9$

③ $\frac{5-2\omega^2}{5\omega-2} + \frac{3\omega-2}{3-2\omega^2} = -1$

س/ جد قيمة $-2\omega - 3\omega i - 3\omega^2 i - 2\omega^2$

Sol

نقوم بجمع الحدود التي تحتوي على i معاً والحدود الأخرى معاً
ثم اخراج عامل مشترك نفس العدد والاشارة

$= -2\omega - 2\omega^2 - 3\omega i - 3\omega^2 i$

$= -2(\omega + \omega^2) - 3i(\omega + \omega^2)$

$= -2(-1) - 3i(-1)$

$= 2 + 3i$

ملاحظة للاطلاع

حول مرافق ω أو ω^2

$\omega \xrightarrow{\text{مرافقه}} \omega^2$

$\omega^2 \xrightarrow{\quad=\quad} \omega$

$2+\omega^2 \xrightarrow{\quad=\quad} 2+\omega$

$3-5\omega \xrightarrow{\quad=\quad} 3-5\omega^2$

$1-i\omega \longrightarrow 1+i\omega^2$

*عند وجود i مع ω يكون المرافق للاثنين معاً

نقوم بقلب ω الى ω^2 فقط وبالعكس
ففي الكسور استبعد الضرب في مرافق المقام
وستخدم توحيد مقامات او طرق اخرى حسب السؤال .

* التمثيل الهندسي للاعداد المركبة

س/ اكتب العدد المرافق والنظير الجمعي لكل من الاعداد الآتية ومثل الاعداد ومرافقها ونظيرها الجمعي على شكل ارجاند.

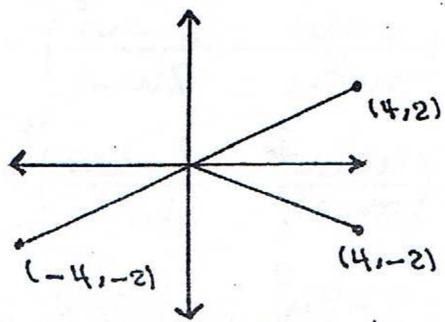
① $Z = 4 + 2i$

Sol

$Z = 4 + 2i$ (عدد) $(4, 2)$

مرافقة ← $\bar{Z} = 4 - 2i$ $(4, -2)$

نظير ← $-Z = -4 - 2i$ $(-4, -2)$



نحول النتائج الى صيغة ديكارتية ونمثلها على الاحداثيات ونصل بينها وبين نقطة الاصل

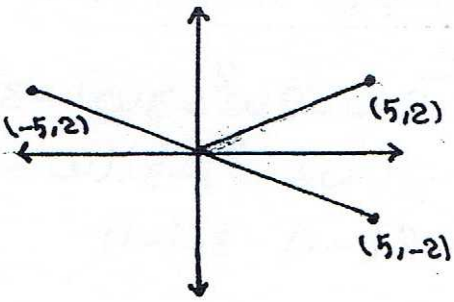
② $Z = 5 - 2i$

Sol

$Z = 5 - 2i$ (عدد) $(5, -2)$

مرافقة ← $\bar{Z} = 5 + 2i$ $(5, 2)$

نظير ← $-Z = -5 + 2i$ $(-5, 2)$



س/ مثل العمليات الآتية هندسياً على شكل ارجاند

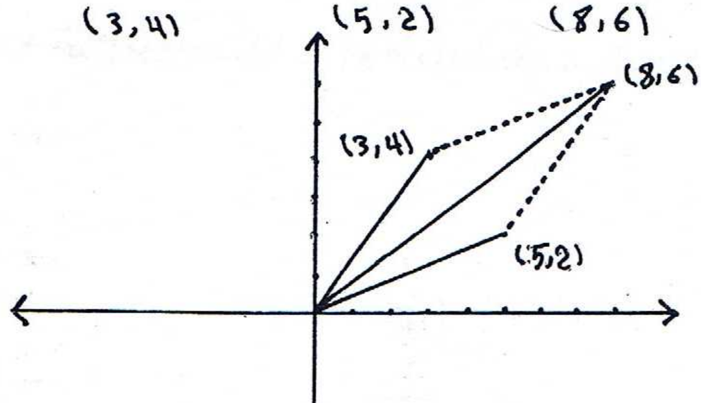
① 2013/3 $(3 + 4i) + (5 + 2i)$

ملاحظة: - عند وجود عملية جمع أو طرح بين عددين مركبين فان شكل ارجاند يكون متوازي اضلاع.

Sol

$(3 + 4i) + (5 + 2i) = (8 + 6i)$

$(3, 4)$ $(5, 2)$ $(8, 6)$



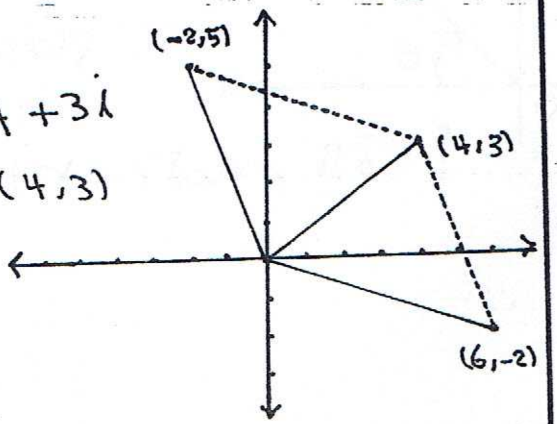
② $(6-2i)-(2-5i)$

Sol

$(6-2i)-(2-5i)$

$= (6-2i)+(-2+5i) = 4+3i$

$(6,-2)$ $(-2,5)$ $(4,3)$



واجب

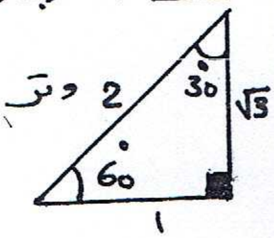
س/ اذا كانت $Z_1=4-2i$, $Z_2=1+2i$ فوضح على شكل ارجاند كلاً مما يأتي

① $-3Z_1$ ② $2Z_1$ ③ Z_1-Z_2 ④ Z_1+Z_2

Polar Form الصيغة القطبية للعدد المركب *

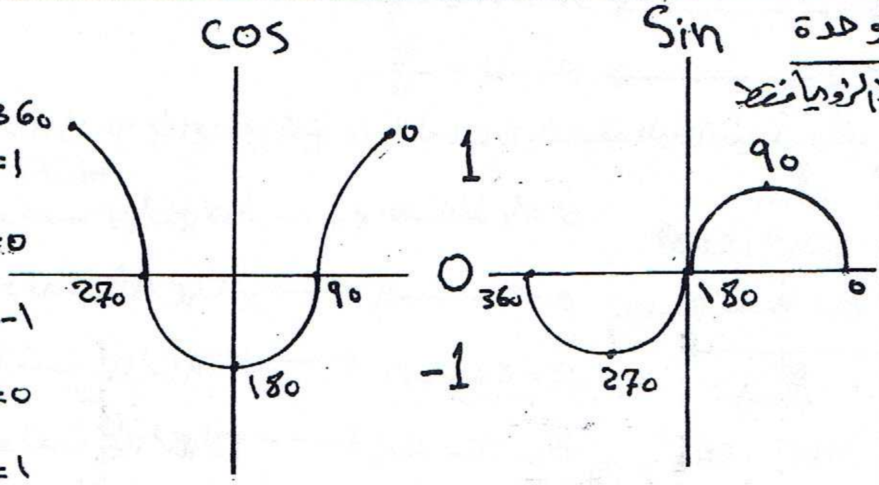
مقدمة حول ايجاد الزوايا المثلثية

$\sin\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$	$\cos\theta=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$	$\tan\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$
$\sin 30=\frac{1}{2}$	$\cos 30=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30=\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60=\frac{1}{2}$	$\tan 60=\sqrt{3}$
$\sin 45=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos 45=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\tan 45=1$



زوايا دائرة الوحدة

نستخدم الرسم لحفظ الزوايا فقط



$\cos 0=1$

$\cos 90=0$

$\cos 180=-1$

$\cos 270=0$

$\cos 360=1$

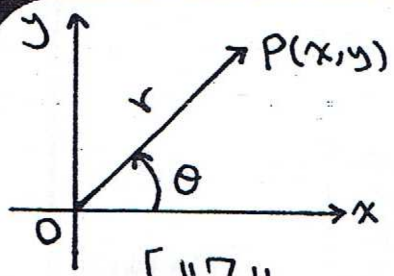
$\sin 0=0$

$\sin 90=1$

$\sin 180=0$

$\sin 270=-1$

$\sin 360=0$



* مقياس العدد المركب Z

ليكن $Z=x+yi$ عدد مركب ومثلناه بالنقطة $P(x,y)$
فأن مقياس العدد Z هو طول المتجه $\overrightarrow{OP}$ وهو عدد حقيقي غير سالب ويرمز للمقياس بالرموز ← $[\|Z\| , \bmod Z , r]$

مقياس: $r=\sqrt{x^2+y^2}$

* سعة العدد المركب

هو قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\overrightarrow{OP}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (x)
ويرمز للسعة بالرموز ← $[\arg(Z) , \theta]$

سعة:

$\cos\theta=\frac{x}{r}$	$\sin\theta=\frac{y}{r}$

لايجاد المقياس والسعة الاساسية

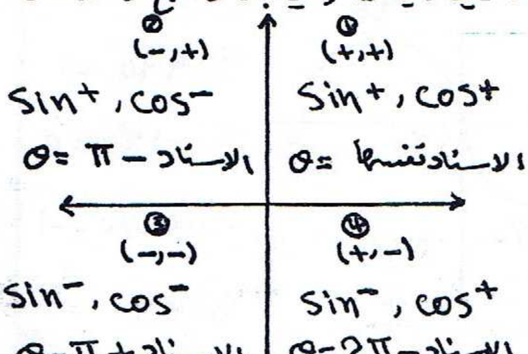
① يجب أن يكون العدد المركب بالصيغة العادية $x+yi$
② نقوم بكتابة العدد المركب بالصيغة الديكارتية (x,y)
③ نجد المقياس من خلال تطبيق القانون $r=\sqrt{x^2+y^2}$
④ نجد السعة من خلال تطبيق القانونين $\cos\theta=\frac{x}{r} , \sin\theta=\frac{y}{r}$
⑤ نجد زاوية الاسناد من قيم sin أو cos فاذا كانت قيم cos مثلاً

$\cos\theta=\frac{\sqrt3}{2}$ ⟶ الاسناد $=\frac{\pi}{6}$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ ⟶ الاسناد $=\frac{\pi}{3}$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt2}$ ⟶ الاسناد $=\frac{\pi}{4}$

⑥ نحدد الزاوية في اي ربع تقع من خلال اشارة الصيغة الديكارتية له ولكي نجد θ نتبع واحدة من النقاط الاتية



① اذا وقعت في الربع الاول ⟵ الاسناد نفسها $=\theta$
② اذا وقعت في الربع الثاني ⟵ $\theta=\pi-$ الاسناد
③ اذا وقعت في الربع الثالث ⟵ $\theta=\pi+$ الاسناد
④ اذا وقعت في الربع الرابع ⟵ $\theta=2\pi-$ الاسناد

س/ جد المقياس والقيمة الاساسية لسعة Z لكل من الاعداد المركبة الآتية.

① $Z = 1 + \sqrt{3}i \Rightarrow (\overset{x}{1}, \overset{y}{\sqrt{3}})$
عادية — ديكارتية

مقياس $r = \|Z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

زاوية الاسناد $= \frac{\pi}{3}$

نحدد الزاوية في اي ربع تقع من خلال اشارة الصيغة الديكارتية (+,+)
الزاوية تقع في الربع الاول وتكون نفسها.

$\therefore \arg(Z) = \theta = \frac{\pi}{3}$ السعة.

② $Z = -1 - i \Rightarrow (\overset{x}{-1}, \overset{y}{-1})$
عادية — ديكارتية

مقياس $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

زاوية الاسناد $= \frac{\pi}{4}$

(-,-) الزاوية تقع في الربع الثالث

$\theta = \pi +$ الاسناد $\Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi+\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

* الصيغة القطبية للعدد المركب

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

لايجاد الصيغة القطبية نتبع نفس خطوات ايجاد المقياس والسعة مع اضافة قانون الصيغة القطبية.

س/ عبر عن كل من الاعداد الآتية بالصيغة القطبية.

① $Z = 2\sqrt{3} - 2i \Rightarrow (2\sqrt{3}, -2)$
عادية — ديكارتية

مقياس $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

زاوية الاسناد $= \frac{\pi}{6}$

(+,-) تقع الزاوية في الربع الرابع

$\theta = 2\pi -$ الاسناد $\Rightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi - \pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ سعة

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z = 4(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})$ صيغة قطبية

* في الصيغة القطبية لانستخرج ...

② $Z = -2 + 2i \Rightarrow (\overset{x}{-2}, \overset{y}{2})$ ديكارتية
عاديه

2013 / 1د

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$ مقياس

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\pi}{4} =$ زاويه الاسناد

الزاويه تقع في الربع الثاني $(-,+)$

$\theta = \pi -$ الاسناد $\Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - \pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ سعه

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$.

واجب
س: عبر عن كل من الاعداد الآتية بالصيغة القطبية.

① $Z = -3\sqrt{3} + 3i$ $\qquad$ ج. $\left[Z = 6(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})\right]$

2014 / 3د

② $Z = 5 - 5i$ $\qquad$ ج. $\left[Z = 5\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})\right]$

2015 / 2د

③ $\frac{1 - 3i^2}{1 - \omega i - \omega^2 i}$ يجب وضع العدد بالصيغه العاديه لذلك يجب أن نتخلص من ω

$= \frac{1+3}{1 - i(\underbrace{\omega+\omega^2}_{-1})} = \frac{4}{\underset{عدد}{1+i}} \times \frac{1-i}{\underset{مرافقه}{1-i}} = \frac{4(1-i)}{1+1} = \frac{4(1-i)}{2}$

$= 2(1-i) = \underset{عاديه}{2 - 2i}$ اكمل حل السؤال ج. $\left[Z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})\right]$

④ $\frac{1 - \omega^2 + \omega}{1 + i + \omega + \omega i}$

$= \frac{-\omega^2 + 1 + \omega}{1 + \omega + i + \omega i} = \frac{-\omega^2 + (1+\omega)}{(1+\omega) + i(1+\omega)} = \frac{-\omega^2 - \omega^2}{-\omega^2 - \omega^2 i} = \frac{-2\omega^2}{-\omega^2(1+i)}$

اكمل الحل

$= \frac{2}{\underset{عدد}{1+i}} \times \frac{1-i}{\underset{مرافقه}{1-i}} = \frac{2(1-i)}{1+1} = \frac{2(1-i)}{2} = 1 - i$

ج. $\left[Z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})\right]$

س: جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد

2016 / ت

$Z = \frac{4 + 2i\omega + 2i\omega^2}{3 - i\omega^2 - i\omega}$

$= \frac{4 + 2i(\omega + \omega^2)}{3 - i(\underbrace{\omega^2 + \omega}_{-1})} = \frac{4 - 2i}{\underset{عدد}{3+i}} \times \frac{3-i}{\underset{مرافقه}{3-i}} = \frac{12 - 4i - 6i - 2}{9+1} = \frac{10 - 10i}{10}$

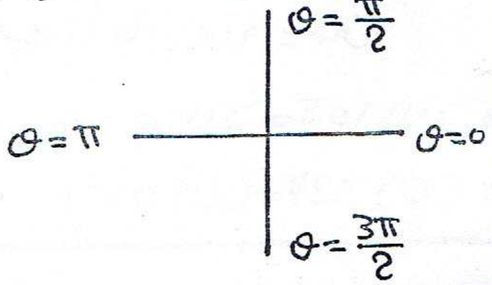
$= \frac{10}{10} - \frac{10i}{10} = 1 - i$ اكمل الحل ج. $\left[r = \sqrt{2}\ \text{مقياس},\ \theta = \frac{7\pi}{4}\ \text{السعه}\right]$

* العدد الحقيقي بحت والتخيلي بحت

ملاحظة:
اذا كانت الصيغة الديكارتية نقطة محورية اي أحد احداثيها يساوي صفر ، $(x,0)$ أو $(0,y)$ فأن

① المقياس (r) يساوي نفس العدد بأشارة موجبة.

② ولايجاد السعة نقوم بتعيين النقطة الديكارتية على محاور الاحداثيات كما موضح في الشكل ادناه فنعرف من خلالها قيمة θ

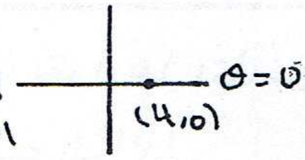


س/ جد المقياس والسعة ثم ضعها بالصيغة القطبية لكل من الاعداد المركبة

① $Z=4 \Rightarrow Z=4+0i \Rightarrow (\overset{x}{4},\overset{y}{0})$ نحول العدد الى صيغة عادية ثم الى صيغة ديكارتية

$\therefore r=4$ المقياس العدد بإشارة موجبة

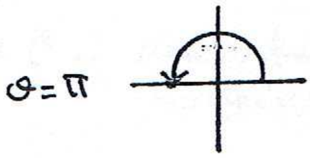
$, \theta=0$ السعة نعين النقطة على المحاور فتكون θ حسب موقع النقطة على المحاور



$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$Z=4(\cos 0+i\sin 0)$ صيغة قطبية

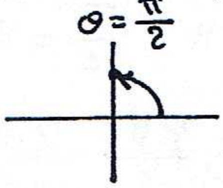
② $Z=-3 \Rightarrow Z=-3+0i \Rightarrow (\overset{x}{-3},\overset{y}{0})$



$r=3$ مقياس $, \theta=\pi$ السعة

$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \Rightarrow Z=3(\cos\pi+i\sin\pi)$ صيغة قطبية

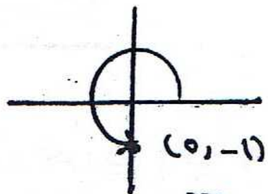
③ $Z=2i \Rightarrow Z=0+2i \Rightarrow (\overset{x}{0},\overset{y}{2})$



$r=2$ مقياس $, \theta=\frac{\pi}{2}$ سعة

$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \Rightarrow Z=2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$

④ $Z=-i \Rightarrow Z=0-i \Rightarrow (\overset{x}{0},\overset{y}{-1})$



$\theta=\frac{3\pi}{2}$

$r=1$, $\theta=\frac{3\pi}{2}$
مقياس سعة

صيغة قطبية $Z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \Rightarrow Z=1(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$

* ايجاد قيم الزوايا الكائرية

اولاً: اذا كانت الزاوية عدد صحيح زوجي فأن الزاويه = صفر

Ex ① $\sin 10\pi=\sin 0=0$

② $\cos 32\pi=\cos 0=1$

ثانياً: اذا كانت الزاويه عدد صحيح فردي فأن الزاويه = π

Ex ① $\sin 13\pi=\sin\pi=0$

② $\cos 41\pi=\cos\pi=-1$

ثالثاً: اذا كانت الزاويه نسبية (كسرية) وكان مقدارها اقل من 360°
والتي يكون فيها (البسط اصغر من ضعف المقام).

②	①
sin+ cos−	sin+ cos+
③ sin− cos−	④ sin− cos+

Ex ①

$\sin\frac{5\pi}{4} \xrightarrow[\text{نجد جهة الزاويه}]{\text{بدون البسط 5}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

العدد في البسط يحدد الربع التي تقع فيه الزاويه ثم الاشارة

الزاويه تقع في الربع الثالث $5\times\frac{\pi}{4}=5\times45=225$ ∴
يكون فيها sin سالب

② $\sin\frac{11\pi}{6} \xrightarrow[\text{نجد جهة الزاويه}]{\text{بدون البسط 11}} \frac{-1}{2}$

الزاوية تقع في الربع الرابع يكون sin سالب $330=11\times30=\frac{\pi}{6}\times11$

③ $\cos\frac{2\pi}{3} \xrightarrow[\text{نجد جهة الزاويه}]{\text{بدون البسط 2}} \frac{-1}{2}$

الزاوية تقع في الربع الثاني يكون cos سالب $120=2\times60=\frac{\pi}{3}\times2$

④ $\sin\frac{3\pi}{4}$ $\xrightarrow[\text{نجد قيمة الزاوية}]{\text{بدون البسط } 3}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

الزاوية تقع في الربع الثاني يكون sin موجب $3 \times \frac{\pi}{4} = 3 \times 45 = 135$

رابعاً: اذا كانت الزاوية نسبية (كسرية) وكان مقدارها اكبر من 360° والتي يكون فيها (البسط اكبر من ضعف المقام)

نقوم بجعل الزاوية اصغر من 360° وذلك بقسمة البسط على ضعف المقام ونأخذ الباقي فقط ونكتب الزاوية $\frac{\pi(\text{باقي القسمة})}{\text{نفس المقام}}$

ثم نجد الزاوية كما مر في فقرة رقم ③

Ex ① $\sin\frac{11\pi}{3}$

$= \sin\frac{5\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

(11 ÷ 6 = 1، 6، باقي القسمة 5)

$5 \times \frac{\pi}{3} = 5 \times 60 = 300$ الزاوية في الرابع تقع يكون sin فيها سالب

② $\cos\frac{14\pi}{3}$

$= \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2}$

(14 ÷ 6 = 2، 12، باقي القسمة 2)

$2 \times \frac{\pi}{3} = 2 \times 60 = 120$ الزاوية تقع في الربع الثاني يكون cos فيها سالب

③ $\sin\frac{57\pi}{6}$

(57 ÷ 12 = 4، 48، باقي القسمة 9)

$= \sin\frac{9\pi}{6}$ ملاحظة: في حالة وجود اختصار يجب ان نختصر

$= \sin\frac{3\pi}{2}$ ملاحظة: اذا كان المقام العدد 2 فالزاوية تكون اما 90 او 270 وهي من الزوايا الرئيسية نجد قيمتها مباشرة

$= -1$

De Moive's theorem مبرهنة ديموافر

$$\left[Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^n \Rightarrow Z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$n \in N , \theta \in R$

س/ احسب باستخدام مبرهنة ديموافر $(1+i)^{11}$

① نجد المقياس والسعة للعدد المركب بدون الأس.
② نضع المقياس والسعة بالصيغة القطبية.
③ نطبق المبرهنة اعلاه و نجد قيم $\sin$ ، $\cos$ أن امكن.

$Z = 1 + i \Rightarrow (1,1)$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ مقياس

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الاسناد $= \frac{\pi}{4}$
الزاوية تقع في الربع الاول
نفسها $\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$ سعة

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\left[Z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{11} \Rightarrow Z^{11} = (\sqrt{2})^{11}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right)$$

زاوية اكبر من 360

$11 \div 8 = 1$ ، 8 ، باقي القسمة 3

$$Z^{11} = 32\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

الزاوية تقع في الربع الثاني $3 \times 45 = 135$

$$Z = 32\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -32 + 32i$$

س/ احسب باستخدام مبرهنة ديموافر $(1-i)^7$

$Z = 1 - i \Rightarrow (1,-1)$ ، $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ مقياس

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

زاوية الاسناد $= \frac{\pi}{4}$
الزاوية تقع في الربع الرابع

$\theta = 2\pi -$ الاسناد $\Rightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi - \pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ سعة

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\left[Z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^7 \Rightarrow Z^7 = (\sqrt{2})^7\left(\cos\frac{49\pi}{4} + i\sin\frac{49\pi}{4}\right)$$

$49 \div 8 = 6$ ، 48 ، 1

$$Z^7 = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{1\pi}{4} + i\sin\frac{1\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 8 + 8i$$

س/ واجب احسب باستخدام مبرهنة ديموافر كلاً من

① $(\sqrt{3}-i)^4$ ج: $[-8-8\sqrt{3}\,i]$

② $(2i)^5$ ج: $[32i]$

③ $(-i)^7$ ج: $[i]$

* نتيجة (1) لمبرهنة ديموافر

$$[Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)]^{-n} \Longrightarrow Z^{-n}=r^{-n}(\cos n\theta-i\sin n\theta)$$

س/ احسب باستخدام مبرهنة ديموافر $(\sqrt{3}+i)^{-9}$

$Z=\sqrt{3}+i \Rightarrow (\sqrt{3},1)$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$ مقياس

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$ } زاوية الاسناد $=\frac{\pi}{6}$ الزاوية تقع في الربع الاول نفسها $\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$ سعة

$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$[Z=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})]^{-9}$

$Z^{-9}=(2)^{-9}(\cos\frac{9\pi}{6}-i\sin\frac{9\pi}{6})$ عند وجود اختصار يجب الاختصار

$Z^{-9}=\frac{1}{2^9}(\cos\frac{3\pi}{2}-i\sin\frac{3\pi}{2})$ اذا كان المقام العدد 2 فالزاوية من الزوايا الرائية المباشرة

$Z^{-9}=\frac{1}{512}(0-i(-1))=\frac{1}{512}(0+i)=\frac{1}{512}i$

س/ واجب احسب باستخدام مبرهنة ديموافر $(-1+i)^{-5}$ ج: $\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8}i\right]$

س/ احسب ما يأتي

① $\left[\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right]^4$

Sol

$= \left[\cos\frac{12\pi}{8} + i\sin\frac{12\pi}{8}\right] = \left[\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right]$

المقام 2 من الزوايا الرائعية المباشرة .

$= 0 + i(-1) = -i$

② $\left[\cos\frac{5\pi}{24} + i\sin\frac{5\pi}{24}\right]^4$

Sol

$= \left[\cos\frac{20\pi}{24} + i\sin\frac{20\pi}{24}\right] = \left[\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right]$

$5 \times \frac{\pi}{6} = 5 \times 30 = 150$

الزاويه تقع في الربع الثاني

$= \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

③ $\left[\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right]^{-3}$

Sol

$= \left[\cos\frac{21\pi}{12} - i\sin\frac{21\pi}{12}\right] = \left[\cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{7\pi}{4}\right]$

$7 \times \frac{\pi}{4} = 7 \times 45 = 315$

الزاويه تقع في الربع الرابع

$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{-1}{\sqrt{2}}i = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

س/ بسط ما يأتي

① $\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^3}$

$= \frac{\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^2\right]^5}{\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^3\right]^3} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^9} = \cos\theta + i\sin\theta$

② $(\cos\theta + i\sin\theta)^8(\cos\theta - i\sin\theta)^4$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^8\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1}\right]^4$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^8(\cos\theta + i\sin\theta)^{-4}$ عند الضرب نجمع الاسس

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$

* نتيجة (2) لمبرهنة ديموافر

$$\left[Z = r(\cos\theta + i\sin)\right]^{\frac{1}{n}} \Rightarrow Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)$$

تستخدم هذه النتيجة لايجاد الجذور (اي التي تحمل أس نسبي)

$\theta \in R, n \in Z^{+}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

س/ باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد $(27i)$

صيغة اخرى للسؤال: جد باستخدام مبرهنة ديموافر $(27i)^{\frac{1}{3}}$

$Z = 0 + 27i \Rightarrow (0, 27) \quad \theta = \frac{\pi}{2}$



$r = 27 \quad , \theta = \frac{\pi}{2}$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\left[Z = 27\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}} \Rightarrow Z^{\frac{1}{3}} = (27)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)$$

$k = 0, 1, 2$ نجد الجذور الثلاث وذلك بتعويض قيم k

اولاً $k=0$

$$Z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right) = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \quad \text{جذر اول}$$

ثانياً $k=1$

$$Z^{\frac{1}{3}} = 3\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right) = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

في الربع الثاني $5 \times \frac{\pi}{6} = 5 \times 30 = 150$

$$= 3\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \quad \text{جذر ثاني}$$

ثالثاً $k=2$

$$Z^{\frac{1}{3}} = 3\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right)$$

$$= 3\left(\cos\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\pi}{\underset{2}{\cancel{6}}} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

عند وجود اختصار يجب الاختصار

$$= 3(0 + i(-1)) = 3(0 - i) = -3i \quad \text{جذر ثالث}$$

$$S = \left\{\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i, \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i, -3i\right\}$$

س٢ عامة / إذا كان $Z=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{-3}}$ عدد مركباً جد باستخدام مبرهنة ديموافر $Z^{\frac{1}{2}}$

صيغة أخرى للسؤال
جد الجذور التربيعية للعدد المركب باستخدام مبرهنة ديموافر

$$Z=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$

$$Z=\frac{1-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i+3i^2}{1+3}=\frac{1-2\sqrt{3}i-3}{4}=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-2}{4}-\frac{2\sqrt{3}i}{4}$$

$$Z=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\Rightarrow\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{4}{4}}=\sqrt{1}=1$$ مقياس

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2}$$
$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد $=\frac{\pi}{3}$
الزاوية تقع في الربع الثالث
$\theta=\pi+$ الاسناد $\Rightarrow\theta=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi+\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$ سعة

$$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\left[Z=1\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\Rightarrow Z^{\frac{1}{2}}=1^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi k}{2}\right)$$

$K=0,1$ نجد الجذور التربيعية وذلك بتعويض ٠ ثم ١ $K=$

اولاً $K=0$

$$Z^{\frac{1}{2}}=1\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}}{2}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}}{2}\right)=\left(\cos\frac{4\pi}{6}+i\sin\frac{4\pi}{6}\right)$$

$$Z^{\frac{1}{2}}=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$ جذر اول

$2\times\frac{\pi}{3}=2\times60=120$ الزاوية بالثاني

ثانياً $K=1$

$$Z^{\frac{1}{2}}=\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi}{2}\right)=\left(\cos\frac{10\pi}{6}+i\sin\frac{10\pi}{6}\right)$$

$$=\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{-\sqrt{3}}{2}i=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$ جذر ثالث

$5\times\frac{\pi}{3}=5\times60=300$ الزاوية بالرابع

$$S=\left\{\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

س/ جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-1+\sqrt{3}i$ باستخدام مبرهنة ديموافر ثم بطريقة الفرض السابقة

ديموافر

$Z=-1+\sqrt{3}i \Rightarrow (-1,\sqrt{3})$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$ مقياس

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

الاسناد $=\frac{\pi}{3}$

الزاوية في الثاني

$\theta=\pi-$ الاسناد

$\theta=\pi-\frac{\pi}{3}$

$\theta=\frac{2\pi}{3}$ سعة

$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\left[Z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

$Z^{\frac{1}{2}}=(2)^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2}\right)$

$k=0,1$

اولاً $k=0$

$Z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$ جذر اول

ثانياً $k=1$

$Z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{2}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{8\pi}{6}+i\sin\frac{8\pi}{6}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\frac{-1}{2}+\frac{-\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$ جذر ثاني

$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i,\ \frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i\right\}$

الفرض

$x+yi=\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$

$(x+yi)^2=-1+\sqrt{3}i$ بتربيع الطرفين

$x^2+2xyi-y^2=-1+\sqrt{3}i$

$x^2-y^2=-1$ ------ ①

$2xyi=\sqrt{3}i$

$2xy=\sqrt{3} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2x}$ ------ ②

نعوض ② في ①

$x^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2x}\right)^2=-1$

$x^2-\frac{3}{4x^2}=-1 \quad]\times 4x^2$

$4x^4-3=-4x^2$

$4x^4+4x^2-3=0$

$(2x^2+3)(2x^2-1)=0$

يهمل

$2x^2-1=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2}$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

اما $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

أو $x=\frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\therefore y=\frac{-\sqrt{3}}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

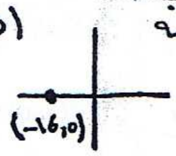
$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$ جذر اول ; $\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$ جذر ثاني

$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i,\ \frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i\right\}$

س/ جد الجذور الاربعة للعدد (16-) باستخدام مبرهنة ديموافر.

صيغة اخرى: جد $(-16)^{\frac{1}{4}}$ باستخدام مبرهنة ديموافر

$Z = -16 + 0i \Rightarrow (-16, 0)$



$r = 16$ مقياس ، $\theta = \pi$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\left[Z = 16(\cos\pi + i\sin\pi)\right]^{\frac{1}{4}} \Rightarrow Z^{\frac{1}{4}} = (16)^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right)$

$k = 0, 1, 2, 3$

اولاً $k=0$

$Z^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}i = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ جذر اول

ثانياً $k=1$

$Z^{\frac{1}{4}} = 2\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$3 \times 45 = 135$ الزاوية بالثاني

$= 2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{-2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}i = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ جذر ثاني

ثالثاً $k=2$

$Z^{\frac{1}{4}} = 2\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$5 \times 45 = 225$ الزاوية بالثالث

$= 2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{-2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}i = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ جذر ثالث

رابعاً $k=3$

$Z^{\frac{1}{4}} = 2\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+6\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$7 \times 45 = 315$ الزاوية بالرابع

$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}i = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ جذر رابع

$S = \{\sqrt{2} + \sqrt{2}i, -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, -\sqrt{2} - \sqrt{2}i, \sqrt{2} - \sqrt{2}i\}$

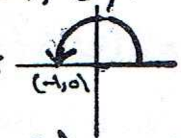
س/ حل المعادلة $x^3+1=0$ حيث $x \in \mathbb{C}$

$x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{-1} \Rightarrow x=(-1)^{\frac{1}{3}}$

جذر ثالث للطرفين

$Z=-1+0i \Rightarrow (-1,0)$

$r=1 \quad , \quad \theta=\pi$



$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\left[Z=1(\cos\pi+i\sin\pi)\right]^{\frac{1}{3}} \Rightarrow Z=(1)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)$

$k=0,1,2$

اولاً $k=0$

$Z^{\frac{1}{3}}=1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ جذر اول

ثانياً $k=1$

$Z^{\frac{1}{3}}=\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right)=\left(\cos\frac{3\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi}{3}\right)$

$=(\cos\pi+i\sin\pi)=-1+i(0)=-1$ جذر ثاني

ثالثاً $k=2$

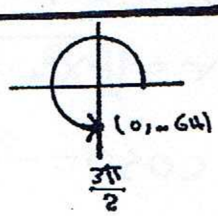
$Z^{\frac{1}{3}}=\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right)=\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{-\sqrt{3}}{2}i=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ جذر ثالث

$\therefore S=\left\{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

س/ جد الجذور الستة للعدد $(-64i)$ باستخدام مبرهنة ديموافر

$Z=0-64i \Rightarrow (0,-64) \quad , r=64 \quad , \theta=\frac{3\pi}{2}$



$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\left[Z=64\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{6}} \Rightarrow Z^{\frac{1}{6}}=(64)^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{6}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{6}\right)$

$k=0,1,2,3,4,5$

يتبع ←

اولاً $k=0$

$$Z^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}}{6}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}}{6}\right)=2\left(\cos\frac{3\pi}{12}+i\sin\frac{3\pi}{12}\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}i=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$ جذر اول

ثانياً $k=1$

$$Z^{\frac{1}{6}}=2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{6}\right)=2\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$ جذر ثاني

ملاحظة: اذا لم يكن المقام احد الاعداد (6 ، 4 ، 3 ، 2) فالزاوية ليس من الزوايا الخاصة لذلك يبقى الناتج كما هو

ثالثاً $k=2$

$$Z^{\frac{1}{6}}=2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{6}\right)=2\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$ جذر ثالث

رابعاً $k=3$

$$Z^{\frac{1}{6}}=2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+6\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+6\pi}{6}\right)=2\left(\cos\frac{15\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{-1}{\sqrt{2}}i\right)=\frac{-2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}i=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$$ جذر رابع

(في الثالث)

خامساً $k=4$

$$Z^{\frac{1}{6}}=2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+8\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+8\pi}{6}\right)=2\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$ جذر خامس

سادساً $k=5$

$$Z^{\frac{1}{6}}=2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+10\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+10\pi}{6}\right)=2\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$$ جذر سادس

س اوجد الصيغة القطبية للمقدار $(\sqrt{3}+i)^2$ ثم جد الجذور الخمسة له (2014 / 2)

صيغة اخرى: جد باستخدام مبرهنة ديموافر $(\sqrt{3}+i)^{\frac{2}{5}}$

صيغة اخرى: جد الصيغة القطبية الجذور الخمسة للمقدار $\sqrt[5]{(\sqrt{3}+i)^2}$

$$Z=(\sqrt{3}+i)^2=3+2\sqrt{3}i+i^2$$

$$Z=3+2\sqrt{3}i-1$$

$$Z=2+2\sqrt{3}i\Longrightarrow(2,2\sqrt{3})$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$$ مقياس

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد $=\frac{\pi}{3}$

الزاوية تقع في الربع الاول نفسها $\theta=\frac{\pi}{3}$

$$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\left[Z=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{\frac{1}{5}}\Rightarrow Z^{\frac{1}{5}}=(4)^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{5}\right)$$

(صيغة قطبية) (لايجاد الجذور الخمسة)

$k=0,1,2,3,4$

يتبع ←

اولاً $k=0$

$$Z^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)$$ جذر اول

ثانياً $k=1$

جذر ثاني $$Z^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$$

ثالثاً $k=2$

جذر ثالث $$Z^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$$

رابعاً $k=3$

جذر رابع $$Z^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$$

خامساً $k=4$

$$Z = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{25\pi}{15} + i\sin\frac{25\pi}{15}\right)$$

$$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt[5]{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$ جذر خامس

س: بين انه لكل $\theta \in R$ ، $n \in N$ فان

$$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = (\cos n\theta - i\sin n\theta)$$

ملاحظة: $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ، $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$(\cos\theta - i\sin\theta)^n$ الطرف الايسر

$$= [\cos\theta - i\sin\theta]^n = [\cos\theta + i\sin(-\theta)]^n$$

$$= [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^n$$ نفرض ان $-\theta = \phi$

$$= [\cos\phi + i\sin\phi]^n$$

$$= (\cos n\phi + i\sin n\phi)$$ حسب مبرهنة ديموافر

$\because -\theta = \phi$

$\therefore \cos n(-\theta) + i\sin n(-\theta)$ حسب الملاحظة اعلاه

$\cos n\theta - i\sin n\theta$ الطرف الايمن

① مبرهنة ديموافر $\left[Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\right]^{n} \Rightarrow Z^{n}=r^{n}(\cos\theta\, n\theta+i\sin\theta)$

② نتيجة (1) $\left[Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\right]^{-n} \Rightarrow Z^{-n}=r^{-n}(\cos n\theta-i\sin\theta)$

③ نتيجة (2) $\left[Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\right]^{\frac{1}{n}} \Rightarrow Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi K}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi K}{n}\right)$

س١ واجب/ احسب باستخدام مبرهنة ديموافر كلاً من الاعداد المركبة الآتية

① $(-64)^{\frac{1}{6}}$

ج. $[\sqrt{3}+i,\ 2i,\ -\sqrt{3}+i,\ -\sqrt{3}-i,\ -2i,\ \sqrt{3}-i]$

② $\sqrt[6]{64}$

ج. $[2,\ 1+\sqrt{3}i,\ -1+\sqrt{3}i,\ -2,\ -1-\sqrt{3}i,\ 1-\sqrt{3}i]$

③ $(1+i)^{\frac{1}{3}}$

ج. $\begin{bmatrix} \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right) \\ \sqrt[6]{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7}{12}+i\sin\frac{17}{12}\right) \end{bmatrix}$

س٢ حل المعادلة $x^3-27i=0 \quad ,\ x\in\mathbb{C}$

ج. $\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i,\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i,\ -3i\right]$

س٣ باستخدام مبرهنة ديموافر جد $\left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{\frac{5}{3}}$

ج. $\left[-i,\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right]$

* اختبار الفصل الاول (يرجى من الطالب بعدم ترك الاختبار لكي يعرف مدى استيعابه لمادة الفصل)

الاختبار الاول:

س1/ جد قيمتي x ، y الحقيقيتين اذا علمت أن $\frac{6}{x+yi}$ ، $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان

س2/ جد ناتج $\left(3\omega^{9n}+\frac{5}{\omega^5}+\frac{4}{\omega^4}\right)^6$ ، $n\in Z$

س3/ باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور الاربعة للعدد (-16)

س4/ جد ناتج بالصيغة العادية $(1+i)^5-(1-i)^5$

الاختبار الثاني:

س1/ حل المعادلة $x^3+1=0$ حيث $x\in\mathbb{C}$

س2/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $1-i\omega^2$ ، $1-i\omega$

س3/ جد قيمة $x,y\in R$ والتي تحقق $\frac{y}{1+i}=\frac{x^2+4}{x+2i}$

س4/ اذا كان $3+i$ هو احد جذري $x^2-ax+(5+5i)=0$ فما قيمة $a\in\mathbb{C}$ وما هو الجذر الآخر

الاختبار الثالث:

س1/ حل المعادلة التربيعية $Z^2-3Z+3+i=0$

س2/ احسب باستخدام مبرهنة ديموافر $(\sqrt{3}+i)^{-9}$

س3/ اثبت أن $\left(\frac{1}{2+\omega}-\frac{1}{2+\omega^2}\right)^2=\frac{-1}{3}$

س4/ جد قيمة x ، y الحقيقيتين والتي تحقق المعادلة

$$\frac{2-i}{1+i}x+\frac{3-i}{2+i}y=\frac{1}{i}$$

س5/ وضح بشكل ارجاند $(6-2i)-(2-5i)$

الاختبار الرابع:

س1/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $\frac{\omega^2}{2-\omega}$ ، $\frac{\omega}{2-\omega^2}$

س2/ احسب ما يأتي $\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)^{-3}$

س3/ جد قيمة $x,y\in R$ والتي تحقق المعادلة $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+(x+yi)=(1+2i)^2$

س4/ اثبت أن $\frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=-2$

س5/ تحقق من أن $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)}=\frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$ اذا كان $c_1=1+i$ ، $c_2=3-2i$

تمت بعونه تعالى

للمزيد من الملازم والدروس وكل ما يخص طلبة السادس الأعدادي زورونا على مواقع التواصل الأجتماعي ...

رحلة التفوق في السادس

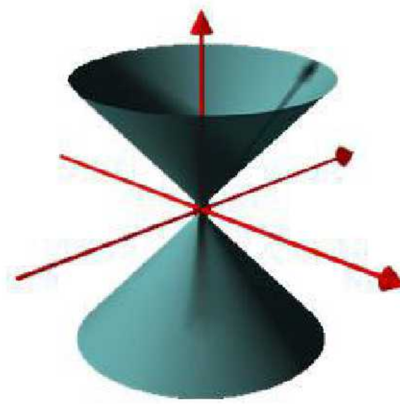
عطاء بلا حدود

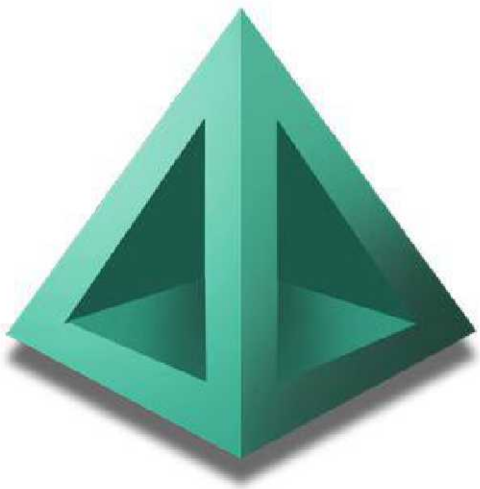
ا.د مينا الاحمد

ا.د اشرف الوائلي

2017

رحلة التفوق في السادس
عطاءٌ بلا حدود





إعداد الأستاذ: عبدالكريم جبر

مساعد الطالب في الرياضيات للصف السادس العلمي

الفصل الثاني
القطوع المخروطية

@رحلة التفوق في السادس

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿وقل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون﴾

انطلاقا من قول المصطفى (ص): ((زكاة العلم نشرهُ وتعليمهُ))

تضع شبكة مواقع رحلة التفوق في السادس التعليمية التربوية الخيرية بين ايديكم احدى اعمالها من ملازم مرحلة السادس الأعدادي هذه المرحلة الهامة والمصيرية في حياة اعزائنا الطلبة وخاصة المتعففين منهم ولمن يتعذر عليه اقتناء هذه المساعدات المدرسية في محافظاتنا العراقية العزيزة بهدف النهوض وتطوير الواقع التعليمي ولو بالجزء اليسير.

إذ أن شبكتنا لاتقتصر عاى نشر الملازم المدرسية فقط أنما تقوم بنشر الدروس المرئية المجانية لأكفأ التدريسيين بالأضافة الى مجموعة قنواتنا التدريسية وكذلك الأرشادات والنصائح وطرق الدراسة الصحيحة هذا من جهة. أما من جهة أخرى فهو كسر لشوكة بعض المحسوبين على الكادر التدريسي ممن يرفضون نشر ملازمهم والتعاون مع ابنائهم الطلبة ليأخذوا من المال هدفا أهم ويتناسوا مصلحة الطالب والواقع التعليمي المتدني.

علماً ان كادر الشبكة والقائمين عليها هم مجموعة من الشباب العراقي الواعي المثقف بالأضافة الى تعاون بعض المدرسين الكرام كما واننا غير تابعين لأي جهة كانت رسمية او غير رسمية انما سر تجمعنا وعملنا هو خيري بحت آملين من الله عز وجل ان يوفقنا لتقديم كل ما هو صالح لشعبنا و وطننا الحبيب.

كادر شبكة رحلة التفوق في السادس

٢٠١٥/٨/٢١

ا.د : اشرف الوائلي

ا.د : مينا الاحمد

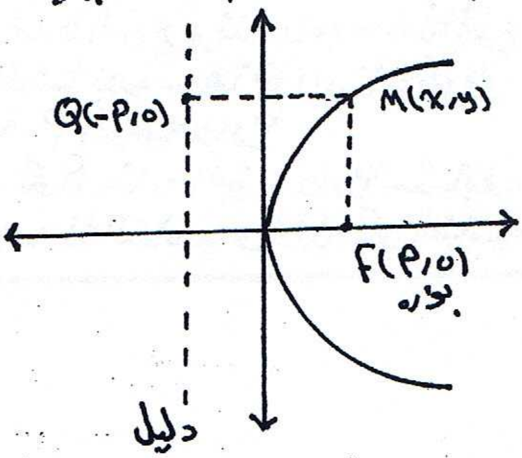
الفصل الثاني
القطوع المخروطية

٠٧٨٠٣٠٠٢١٤٠
الاستاذ عبد الكريم جبر

[redacted]

أولاً القطع المكافئ: هو مجموعة النقط $M(x,y)$ في المستوي والتي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة $f(p,0)$ تسمى البؤرة يساوي بعدها عن مستقيم معلوم هو الدليل

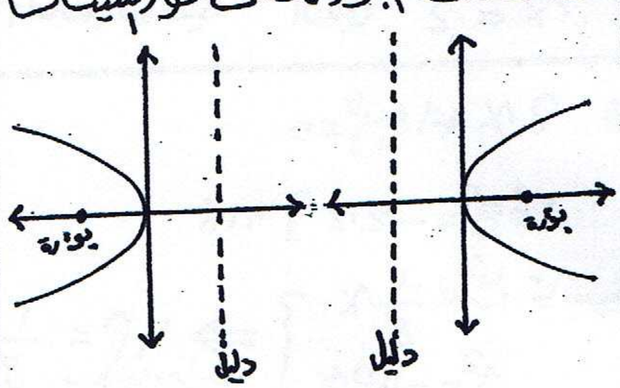
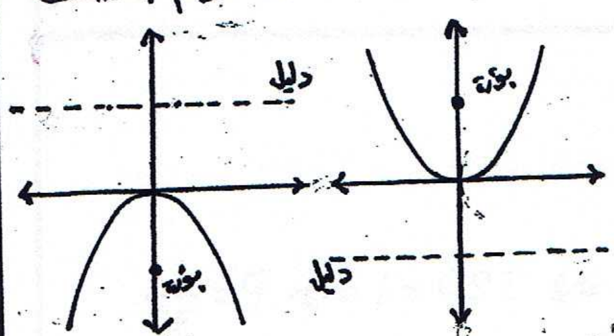
$MF = MQ$



الاختلاف المركزي $e = \frac{MF}{MQ} = 1$

$\therefore MF = MQ$

انواع القطع المكافئ:

اذا كانت البؤرة على محور السينات	اذا كانت البؤرة على محور الصادات
	
معادلة قطع $y^2 = 4px$ ، $y^2 = -4px$	معادلة قطع $x^2 = 4py$ ، $x^2 = -4py$
بؤرة $(p,0)$ ، $(-p,0)$	بؤرة $(0,p)$ ، $(0,-p)$
دليل $x = -p$ ، $x = p$	دليل $y = -p$ ، $y = p$

* تكون اشارة البؤرة موافقة لاشارة المعادلة
* تكون اشارة الدليل عكس اشارة المعادلة

س٢/ جد البؤرة و الدليل في كلاً من معادلات القطع المكافئ الآتية

*ملاحظة: لايجاد البؤرة ومعادلة الدليل

١) نقوم بجعل المعادلة بالوضع القياسي وذلك بجعل متغير الدرجة الثانية في جهة واحدة والحد الآخر في الجهة الأخرى.

٢) يجب أن يكون معامل متغير الدرجة الثانية واحد والا نقسم عليه.

٣) نحدد النوع ونقارن مع معادلة النوع المشابه معها في الاشارة لكي نجد قيمة P الموجبة دائماً.

٤) تكون اشارة البؤرة دائماً مشابهة المعادلة القياسية والدليل بعكس القياسية

① $y^2-32x=0$

Sol.

$y^2=32x$ قياسية

$y^2=4px$

$\Rightarrow 4p=32$ المقارنة تكون بنفس الاشارة

$p=8$ دائماً موجبة

$\therefore f(8,0)$ بؤرة

$x=-8$ الدليل

② $5y^2+40x=0$

$5y^2=-40x \;]\div 5$

$y^2=-8x$ قياسية

$y^2=-4px$

$\Rightarrow 4p=8 \Rightarrow p=2$ قيمة P تكون دائماً موجبة

$f(-2,0)$ البؤرة — اشارة البؤرة توافق المعادلة القياسية

$x=2$ الدليل — اشارة الدليل عكس اشارة المعادلة القياسية

③ $2x+16y^2=0$

$16y^2=-2x \;]\div 16$

$y^2=\frac{-1}{8}x$ قياسية

$y^2=-4px$

$\Rightarrow 4p=\frac{1}{8} \Rightarrow 32p=1 \Rightarrow p=\frac{1}{32}$ (نضرب x وسطين في طرفين)

$f(\frac{-1}{32},0)$ البؤرة

$x=\frac{1}{32}$ الدليل

س/ جد البؤرة والدليل ومعادلة المحور والرأس للقطع المكافئ وارسمه $\frac{1}{3}x^2-4y=0$

$\frac{1}{3}x^2-4y=0$

$\frac{1}{3}x^2=4y$] ×3

قياسية $x^2=12y$
$x^2=4py$ } $\Rightarrow 4p=12 \Rightarrow p=3$

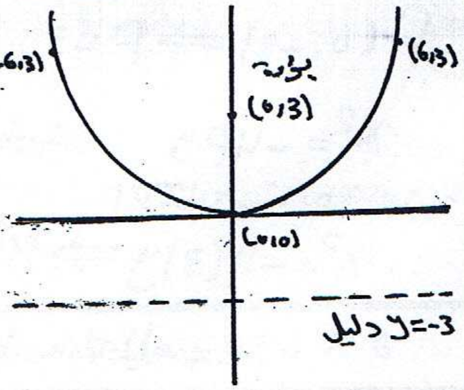
$(0,3)$ البؤرة

$y=-3$ الدليل

$x=0$ معادلة المحور

$(0,0)$ الرأس

x	y	(x,y)
0	0	(0,0)
±6	3	(6,3) (-6,3)



س/ جد البؤرة والدليل ومعادلة المحور والرأس للقطع المكافئ وارسمه $y^2=-4x$

$y^2=-4x$
$y^2=-4px$ } $\Rightarrow 4p=4 \Rightarrow p=1$

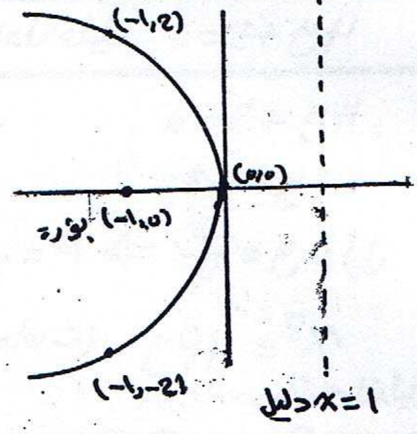
$(-1,0)$ البؤرة

$x=1$ الدليل

$y=0$ معادلة المحور

$(0,0)$ الرأس

x	y	(x,y)
0	0	(0,0)
-1	±2	(-1,2) (-1,-2)



* ايجاد معادلة قطع مكافئ اذا علمت بؤرة او دليل

① نجد p من البؤرة او من الدليل بإشارة موجبه دائماً.

② نجد معادلة النوع القياسية بإشارة مشابهه لاشارة البؤرة ومعاكسه للدليل

③ نعوض قيمة p الموجبه في معادلة النوع لكي نجد المعادلة المطلوبه.

س/ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته $f(2,0)$

البؤرة $f(2,0) \Rightarrow p=2$

$y^2=4px$ (لان البؤرة على محور السينات)

المعادلة القياسية + اشارتها مشابهه لاشارة البؤرة

$\therefore y^2=4(2)x \Rightarrow y^2=8x$ معادلة قطع مكافئ

س/ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته $f(0,-3)$

$f(0,-3) \Rightarrow p=3$ البؤرة

$x^2=-4py$ (لان البؤرة على محور الصادات)

الاشارة مشابهة للبؤرة.

$\therefore x^2=-4(3)y \Rightarrow x^2=-12y$ معادلة القطع المكافئ

س/ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومعادلة دليله $8x-32=0$

$8x-32=0$

$8x=32$

دليل $x=4 \Rightarrow p=4$

$y^2=-4px$ (لان الدليل على محور السينات)

الاشارة معاكسه للدليل

$\therefore y^2=-4(4)x \Rightarrow y^2=-16x$ معادلة القطع المكافئ

س/ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومعادلة دليله $4y+3=0$

$4y+3=0$

$4y=-3$

دليل $y=\frac{-3}{4} \Rightarrow p=\frac{3}{4}$

$x^2=4py$ (لان الدليل على محور الصادات)

الاشارة معاكسه للدليل

$\therefore x^2=4(\frac{3}{4})y \Rightarrow x^2=3y$ معادلة القطع المكافئ

* ايجاد معادلة القطع المكافئ اذا كان يمر بنقطة واحدة.

① نقوم بتحديد النوع أن امكن واذا لا نأخذ احتمالين

② نعوض قيمتي x,y للنقطة في معادلة النوع لانها تحقق لكي نجد قيمة p الموجبة دائماً

③ نعوض قيمة p المستخرجة في معادلة النوع لكي نجد المعادلة المطلوبة

* اذا كانت هناك نقطة تمر او تقطع او تمس او تقع او تنتمي للقطع فهي تحقق معادلة القطع.

س/ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي لمحور السينات ويمر بالنقطة (3 ، 1)

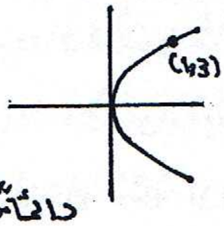
* ① اذا كانت البؤرة على محور السينات تكون اشارة المعادلة القياسية معتمدة على اشارة الاحداثي السيني.

② اذا كانت البؤرة على محور الصادات تكون اشارة المعادلة القياسية معتمدة على اشارة الاحداثي الصادي

* ممكن اعتماد اشارة المعادلة القياسية على الرسم من خلال تعيين النقطة في الرسم

$y^2 = 4px$ (لان البؤرة على محور السينات)

$(\overset{x}{3}, \overset{y}{1}) \in$ فهي تحقق



$(1)^2 = 4p(3)$

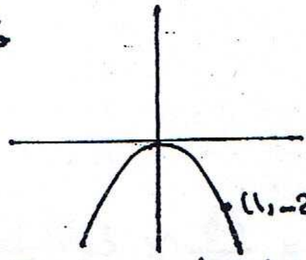
$12p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{12}$ دائماً موجب

$\therefore y^2 = 4(\frac{1}{12})x \Rightarrow y^2 = \frac{1}{3}x$ معادلة القطع

س/ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (1،−2)

$x^2 = -4py$ (لان البؤرة على محور الصادات)

$(\overset{x}{1}, \overset{y}{-2}) \in$ فهي تحقق



$(1)^2 = -4p(-2)$

$8p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{8}$

$\therefore x^2 = -4(\frac{1}{8})y \Rightarrow x^2 = \frac{-1}{2}y$ معادلة القطع

س/ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطة (3،−1)

لايمكن تحديد النوع لذلك نأخذ احتمالين

« احتمال اول »

اذا كانت البؤرة على السينات $y^2 = -4px$

$(-1, 3) \in$ فهي تحقق

$(3)^2 = -4p(-1)$

$4p = 9 \Rightarrow p = \frac{9}{4}$

$\therefore y^2 = -4(\frac{9}{4})x$

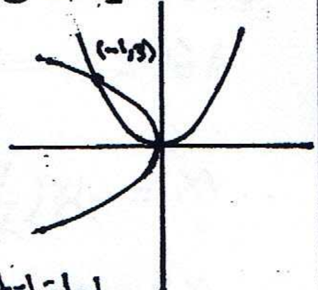
$y^2 = -9x$ معادلة القطع

« احتمال ثاني »

اذا كانت البؤرة على الصادات $x^2 = 4py$

$(-1, 3) \in$ فهي تحقق

$(-1)^2 = 4p(3)$



$12p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{12}$

$\therefore x^2 = 4(\frac{1}{12})y$

$x^2 = \frac{1}{3}y$ معادلة القطع

* ايجاد معادلة القطع المكافئ اذا كان يمر بنقطتين .

① نقوم بتحديد النوع كما يلي

أ) اذا كان الاحداثي السيني للنقطتين ثابت القيمة والاشارة القطع من النوع الاول

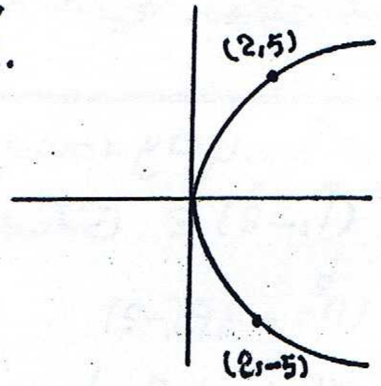
ب) اذا كان الاحداثي الصادي للنقطتين ثابت القيمة والاشارة القطع من النوع الثاني

② نعوض قيمتي x,y لاحدى النقاط فقط لانها تحقق لكي نجد قيمة p الموجبة دائماً

③ نعوض قيمة p المستخرجة في معادلة النوع لكي نجد المعادلة المطلوبة

س/ جد معادلة القطع الذي يمر بالنقطتين $(2,5)$, $(2,-5)$ والرأس في نقطة الاصل

ممكن من خلال الرسم تحديد النوع



$(2,-5),(2,5)$ الاحداثي السيني ثابت القيمة والاشارة

∴ معادلة القطع من النوع الاول اي على محور السينات

$$y^2=4px$$

$(2,-5)\in$ فهي تحقق

$$(-5)^2=4p(2)$$

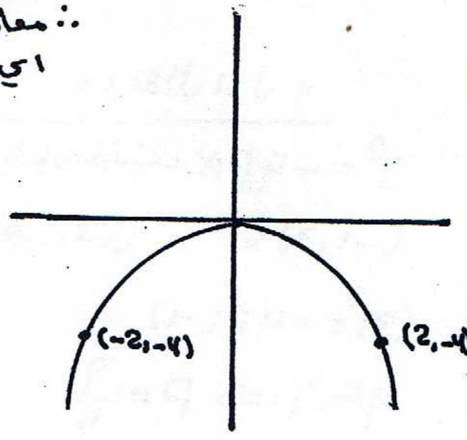
$$8p=25 \Rightarrow p=\frac{25}{8}$$

$\therefore y^2=4\left(\frac{25}{8}\right)x \Rightarrow y^2=\frac{25}{2}x$ معادلة القطع المكافئ

س/ جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2,-4)$, $(-2,-4)$ والرأس في نقطة الاصل

$(-2,-4),(2,-4)$ الاحداثي الصادي ثابت القيمة والاشارة

∴ معادلة القطع من النوع الثاني اي على محور الصادات



$$x^2=-4py$$

$(-2,-4)\in$ فهي تحقق

$$(-2)^2=-4p(-4)$$

$$16p=4 \Rightarrow p=\frac{4}{16} \Rightarrow p=\frac{1}{4}$$

$$\therefore x^2=-4\left(\frac{1}{4}\right)y$$

$x^2=-y$ معادلة القطع مكافئ

* ايجاد معادلة القطع المكافئ اذا كان دليله يمر بنقطة .

① نقوم بتحديد النوع أن امكن والا نأخذ احتمالين .
② نحدد الدليل أما x أو y حسب النوع
③ نجد قيمة p الموجبة من الدليل باشارة موجبة دائماً
④ نجد معادلة النوع وفق الدليل السيني او الصادي باشارة معاكسة لاشارة الدليل
⑤ نعوض قيمة p الموجبة في معادلة النوع لكي نجد المعادلة المطلوبة

س جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي لمحور السينات ودليله يمر بالنقطة $(-3,4)$

البؤرة على محور السينات $(-3,4) \in x$

$\Downarrow$

دليل $x=-3 \Rightarrow p=3$

$y^2=4px$ الاشارة معاكسة للدليل

$\therefore y^2=4(3)x \Rightarrow y^2=12x$ معادلة القطع

س جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر دليله بالنقطة $(3,-5)$

يوجد احتمالين للمعادلة القياسية لعدم تحديد موقع البؤرة

اولاً البؤرة تنتمي لمحور السينات	ثانياً البؤرة تنتمي لمحور الصادات
$(3,-5) \in x$	$(3,-5) \in y$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
دليل $x=3 \Rightarrow p=3$	دليل $y=-5 \Rightarrow p=5$
$y^2=-4px$ الاشارة عكس الدليل	$x^2=4py$ الاشارة عكس الدليل
$y^2=-4(3)x$	$x^2=4(5)y$
$y^2=-12x$ معادلة القطع	$x^2=20y$ معادلة القطع

* ايجاد معادلة القطع المكافئ اذا كان دليله يمر بنقطتين .

نقوم بتحديد النوع حسب القيمة والاشارة للاحداثي السيني او الصادي ونطبق نفس خطوات الحل اذا كان الدليل يمر بنقطة واحدة لواحدة من النقاط فقط .

س جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ودليله يمر بالنقطتين $(-2,-2),(4,-2)$

الصادي ثابت القيمة والاشارة

$(-2,-2) \in y$

$\Downarrow$

دليل $y=-2 \Rightarrow p=2$

$x^2=4py$ الاشارة معاكسة للدليل

$x^2=4(2)y \Rightarrow x^2=8y$ معادلة قطع

س/ قطع مكافئ معادلته $Ax^2+8y=0$ يمر بالنقطة (1,2) جد قيمة A ثم جد بؤرته ودليله وارسم القطع.

∵ القطع يمر بالنقطة $(\overset{x}{1},\overset{y}{2})$

∴ يحقق المعادلة

$A(1)^2+8(2)=0$

$A+16=0 \Rightarrow A=-16$

نعوض قيمة A بالمعادلة

$-16x^2+8y=0$

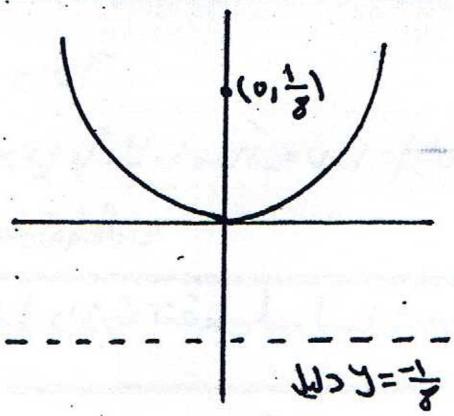
$-16x^2=-8y \;]\div(-16)$

$x^2=\frac{-8}{-16}y$

$x^2=\frac{1}{2}y$ قياسية

$x^2=4py$

مقارنة $\Rightarrow 4p=\frac{1}{2} \Rightarrow 8p=1 \Rightarrow p=\frac{1}{8}$



$(0,\frac{1}{8})$ البؤرة ، $y=\frac{-1}{8}$ معادلة الدليل

س/ واجب: جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل في كل مما يأتي.

1. اذا كانت بؤرته تنتمي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (3,1) [$x^2=9y$] = ج.
2. اذا كانت معادلة دليله $4y-3=0$ [$x^2=-3y$] = ج.
3. اذا كان دليله يمر بالنقطة (-2,4) [$y^2=8x$ ، $x^2=-16y$] = ج.
4. اذا كان دليله يمر بالنقطتين (2,-5) ، (2,3) [$y^2=-8x$] = ج.

* ايجاد معادلة القطع المكافئ باستخدام التعريف

س/ عرف القطع المكافئ ثم جد باستخدام التعريف معادلة القطع الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته النقطة (7,0)

القطع المكافئ: هو مجموعة النقاط في المستوي التي يكون بعد كل منها عن البؤرة يساوي بعدها عن الدليل

نفرض نقطة تنتمي للقطع ولتكن M(x,y) والتي يكون بعدها عن البؤرة = بعدها عن الدليل

$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$\sqrt{(x-7)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+7)^2+(y-y)^2}$

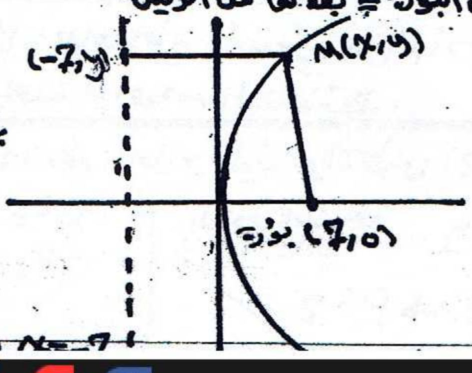
بالتربيع

$(x-7)^2+y^2=(x+7)^2$

$\cancel{x^2}-14x+\cancel{49}+y^2=\cancel{x^2}+14x+\cancel{49}$

$-14x+y^2=14x$

$y^2=28x$ معادلة قطع مكافئ



س١ باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $y=\sqrt{3}$ والرأس في نقطة الأصل.

نفرض النقطة $M(x,y)$ تنتمي للقطع

دليل $y=\sqrt{3} \Rightarrow (0,-\sqrt{3})$ بؤرة

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

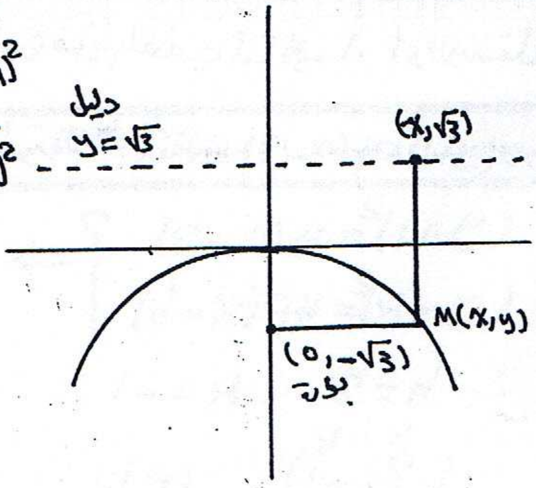
$$\sqrt{(x-0)^2+(y+\sqrt{3})^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y-\sqrt{3})^2}$$

$$x^2+(y+\sqrt{3})^2=(y-\sqrt{3})^2$$

$$x^2+\cancel{y^2}+2\sqrt{3}y+\cancel{3}=\cancel{y^2}-2\sqrt{3}y+\cancel{3}$$

$$x^2+2\sqrt{3}y=-2\sqrt{3}y$$

معادلة قطع مكافئ $x^2=-4\sqrt{3}y$



س واجب باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ اذا علمت أن بؤرته $(-\sqrt{3},0)$ والرأس في نقطة الأصل

$[y^2=-4\sqrt{3}x]$ ج.

* انسحاب المحاور في القطع المكافئ

في كل حالات القطع المكافئ يكون الرأس $(0,0)$ اي نقطة الأصل وعند انسحاب الرأس الى النقطة (h,k) سوف تتغير مكونات القطع المكافئ.

النوع الأول (البؤرة على محور السينات)

$$(y-k)^2=\mp 4p(x-h)$$

معادلة قياسية نقارن بها لكي نجد p الموجبة

الرأس (h,k)

البؤرة $f(h\mp p,k)$

تكون اشارة p موافقة لاشارة المعادلة القياسية

معادلة الدليل $x=h\mp p$

تكون اشارة p معاكسة لاشارة المعادلة القياسية

معادلة المحور $y=k$

النوع الثاني (البؤرة على محور الصادات)

$$(x-h)^2=\mp 4p(y-k)$$

معادلة قياسية نقارن بها لكي نجد p الموجبة

الرأس (h,k)

البؤرة $f(h,k\mp p)$

تكون اشارة p موافقة لاشارة المعادلة القياسية

معادلة الدليل $y=k\mp p$

تكون اشارة p معاكسة لاشارة المعادلة القياسية

معادلة المحور $x=h$

* ملاحظة: اذا كانت معادلة الدليل x فتكون معادلة المحور y و بالعكس

* **ملاحظة** ① البعد بين البؤرة والرأس = البعد بين الرأس والدليل.

② اذا كانت اشارة p موجبة فتكون فتحة المنحني اما لليمين أو للاعلى.

③ اذا كانت اشارة p سالبة فتكون فتحة المنحني اما لليسار أو للاسفل.

س/ عين الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة المحور للقطع المكافئ $(y+1)^2=4(x-2)$ وارسمه

$$\left.\begin{aligned}(y+1)^2&=4(x-2)\\(y-k)^2&=4p(x-h)\end{aligned}\right\}\Rightarrow 4p=4\Rightarrow p=1$$

h الحد المجاور الى x بعكس الاشارة

k الحد المجاور الى y بعكس الاشارة

$\therefore h=2 \quad , k=-1$

$(\overset{h}{2},\overset{k}{-1})$ رأس

البؤرة $f(h+p,k)=(2+1,-1)=f(3,-1)$

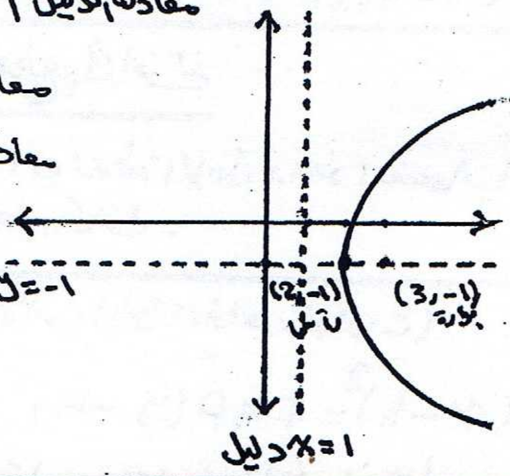
(اشارة p موافقة للقياسي)

معادلة الدليل $x=h-p \Rightarrow x=2-1 \Rightarrow x=1$

(اشارة p معاكسة للقياسية)

معادلة المحور $y=k \Rightarrow y=-1$

معادلة المحور: هو الخط الذي تقع عليه البؤرة والرأس.



س/ ناقش القطع المكافئ $y^2=-4(x-2)$

$$\left.\begin{aligned}(y-0)^2&=-4(x-2)\\(y-k)^2&=-4p(x-h)\end{aligned}\right\}\Rightarrow 4p=4\Rightarrow p=1$$

$h=2 \ , \ k=0$

$(\overset{h}{2},\overset{k}{0})$ رأس

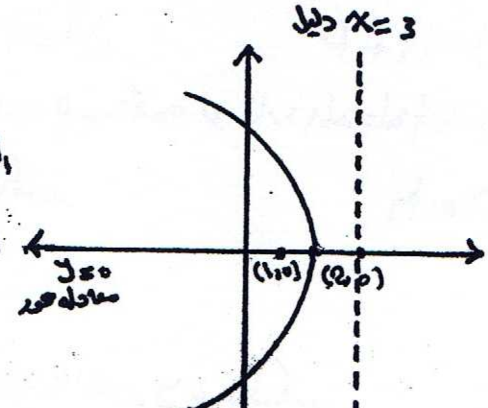
البؤرة $F(h-p,k)=F(2-1,0)=f(1,0)$

(اشارة p موافقة للقياسية)

الدليل $x=h+p \Rightarrow x=2+1 \Rightarrow x=3$

(اشارة p معاكسة القياسية)

معادلة المحور $y=k \Rightarrow y=0$



س/ جد الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل والمحور للقطع المكافئ $(x-1)^2=8(y-1)$ وارسمه

$$\left.\begin{aligned}(x-1)^2&=8(y-1)\\(x-h)^2&=4p(y-k)\end{aligned}\right\}\Rightarrow 4p=8\Rightarrow p=2$$

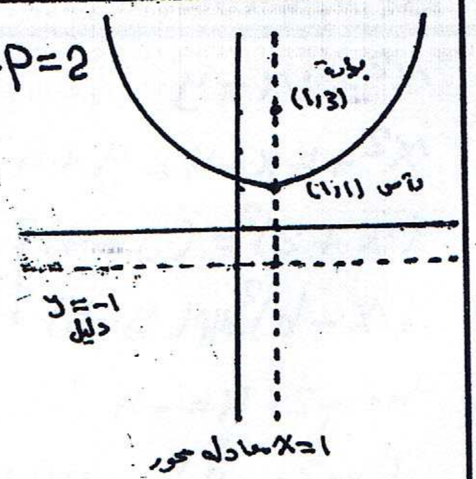
$h=1\ ,\ k=1$

$(\overset{h}{1},\overset{k}{1})$ رأس

$F(h,k+p)=F(1,1+2)=F(1,3)$ البؤرة

$y=k-p\Rightarrow y=1-2\Rightarrow y=-1$ الدليل

$x=h\Rightarrow x=1$ معادلة المحور



س/ عين الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل والمحور للقطع المكافئ $y^2+4y+2x+6=0$

① نجمع الحدود التي تحتوي على y في جهة والحدود التي تحتوي على x في جهة أخرى والحد المطلق نجمعه في الجهة التي تحتوي على متغير من الدرجة الأولى فقط

② اذا كان معامل y^2 غير الواحد نقسم عليه لكي يكون واحد

③ نضيف الى الطرفين (نصف معامل y)^2

④ نجعل الطرف الايسر مربع كامل وذلك بتطبيق القاعدة $(\sqrt{ح_1}$ اشارة الوسط $\sqrt{ح_3})^2$

⑤ يجب أن يكون معامل الطرف الايمن واحد والا نقسم عليه

$y^2+4y=-2x-6$

$(2)^2=4$ نصف معامل y

$y^2+4y+4=-2x-6+4$

$(y+2)^2=-2x-2$

$$\left.\begin{aligned}(y+2)^2&=-2(x+1)\\(y-k)^2&=-4p(x-h)\end{aligned}\right\}$$

$4p=2\Rightarrow p=\frac{2}{4}\Rightarrow p=\frac{1}{2}$

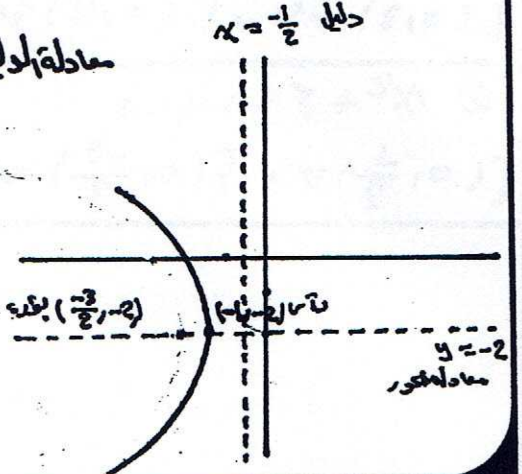
$h=-1\ ,\ k=-2$

$(\overset{h}{-1},\overset{k}{-2})$ رأس

$F(h-p,k)=(-1-\frac{1}{2},-2)=F(\frac{-3}{2},-2)$ البؤرة

$x=h+p\Rightarrow x=-1+\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{-1}{2}$ معادلة الدليل

$y=k\Rightarrow y=-2$ معادلة المحور



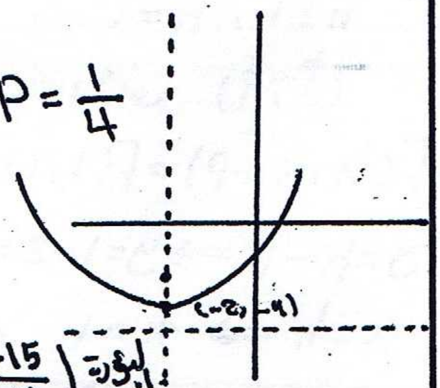
س/ ناقش القطع المكافئ $y=x^2+4x$

نفس خطوات السؤال السابق

$x^2+4x=y$

$x^2+4x+4=y+4$

$\left.\begin{array}{l}(x+2)^2=(y+4)\\(x-h)^2=4p(y-k)\end{array}\right\} \Rightarrow 4p=1 \Rightarrow p=\frac{1}{4}$



$h=-2,\ k=-4$

$(-2,-4)$ رأس

$f(h,k+p)=f(-2,-4+\frac{1}{4})=f(-2,\frac{-15}{4})$ البؤرة

$y=k-p \Rightarrow y=-4-\frac{1}{4} \Rightarrow y=\frac{-17}{4}$ معادلة الدليل

$x=h \Rightarrow x=-2$ معادلة المحور

واجب/ ناقش القطع المكافئ في كل مما يأتي

① $x^2+6x-y=0$

[$(-3,-9)$ رأس ، $f(-3,\frac{-35}{4})$ بؤرة ، $y=\frac{-37}{4}$ دليل ، $x=-3$ معادلة محور] = ج

② $y^2-6y+4x+1=0$

[$(2,3)$ رأس ، $f(1,3)$ بؤرة ، $x=3$ دليل ، $y=3$ معادلة محور] = ج

③ $y^2-4y-8x-4=0$

[$(-1,2)$ رأس ، $f(1,2)$ بؤرة ، $x=-3$ دليل ، $y=2$ معادلة محور] = ج

④ $(y+1)^2=4(x-2)$

[$(2,-1)$ رأس ، $f(3,-1)$ بؤرة ، $x=1$ دليل ، $y=-1$ معادلة محور] = ج

⑤ $x^2+4y-12=0$

[$(0,3)$ رأس ، $f(0,2)$ البؤرة ، $y=4$ الدليل ، $x=0$ معادلة محور] = ج

⑥ $x^2+8y+4=0$

[$(0,\frac{-1}{2})$ رأس ، $f(0,\frac{-5}{2})$ بؤرة ، $y=\frac{3}{2}$ دليل ، $x=0$ معادلة محور] = ج

القطع الناقص

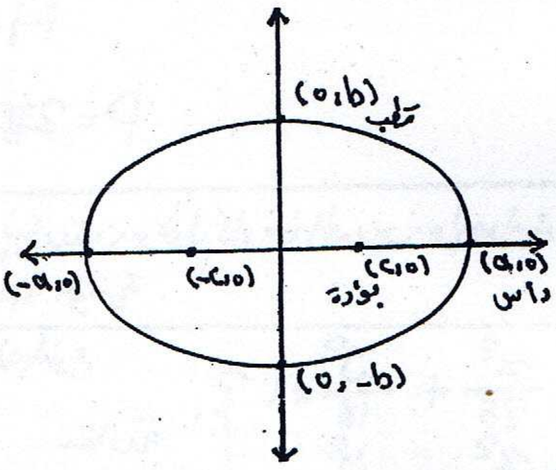
مجموعة من النقط في المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) يساوي عدد ثابت ($2a$).

النوع الاول

القطع الناقص الذي بؤرتاه ورأساه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

اذا كان مقام x^2 اكبر من مقام y^2 فالمعادلة من النوع الاول



تكون على محور السينات:
- رأسان $(a,0),(-a,0)$
- بؤرتان $(c,0),(-c,0)$
- طول المحور الكبير $2a$
- البعد البؤري $2c$

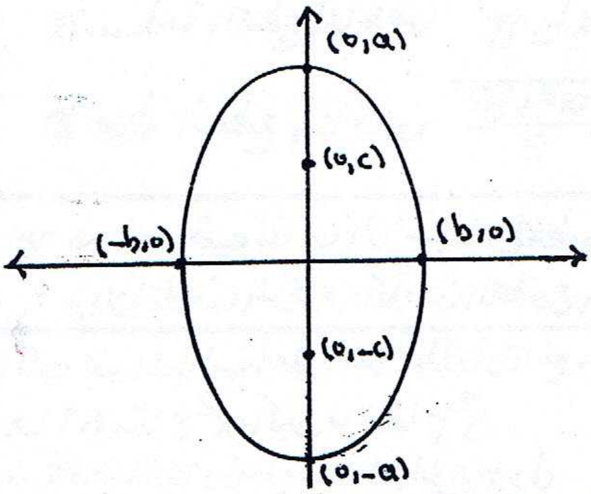
تكون على محور الصادات:
- قطبان $(0,b),(0,-b)$
- طول المحور الصغير $2b$

النوع الثاني

القطع الناقص الذي بؤرتاه ورأساه على محور الصادات ومركزه نقطة الاصل.

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

اذا كان مقام y^2 اكبر من مقام x^2 فالمعادلة من النوع الثاني



تكون على محور الصادات:
- رأسان $(0,a),(0,-a)$
- بؤرتان $(0,c),(0,-c)$
- طول المحور الكبير $2a$
- البعد البؤري $2c$

تكون على محور السينات:
- قطبان $(b,0),(-b,0)$
- طول المحور الصغير $2b$

العلاقة $c^2=a^2-b^2$ حيث $a>b$, $a>c$

* ملاحظات

① يسمى $2a$
- ← طول المحور الكبير
- ← المسافة بين الرأسين
- ← البعد الثابت (العدد الثابت)
- ← مجموع بعدي أية نقطة تنتمي الى عن بؤرتية.

② يسمى $2b$
- ← طول المحور الصغير
- ← المسافة بين القطبين

③ يسمى $2c$
- ← البعد البؤري
- ← المسافة بين البؤرتين

④ الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a}$ ويكون اصغر من واحد

⑤ مساحة القطع الناقص $A = ab\pi$

⑥ محيط القطع الناقص $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

س/ جد احداثيي كل من الرأسين والقطبين والبؤرتين وطول كل من المحورين والبعد البؤري والاختلاف المركزي لكل من القطوع الناقصة الآتية .

① $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ مقارنة

لكي نجد المطالب اعلاه نقوم بالمقارنة مع معادلة النوع
بما أن مقام x^2 اكبر من مقام y^2
∴ تكون المقارنة مع معادلة النوع الاول

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ ، $(5,0), (-5,0)$ رأسان

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$ ، $(0,4), (0,-4)$ قطبان

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 16 \Rightarrow c^2 = 9$

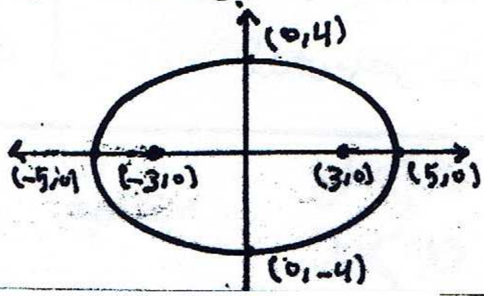
$c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$ ، $(3,0), (-3,0)$ بؤرتان

طول المحور الكبير $2a = 2(5) = 10$ وحدة

طول المحور الصغير $2b = 2(4) = 8$ وحدة

البعد البؤري $2c = 2(3) = 6$ وحدة

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$



② $13x^2 + 9y^2 = 117 \,]\, \div 117$

*لكي نقارن مع معادلة النوع يجب تكون المعادلة بالوضع القياسي اي أن يكون معامل x^2 , y^2 وبعد يساوي يساوي واحد

$$\frac{13x^2}{117_{9}} + \frac{9y^2}{117_{13}} = 1$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{13} = 1 \\ \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \end{matrix}\right\}$$ مقارنة

$a^2 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13}$, $(0, \sqrt{13})$, $(0, -\sqrt{13})$ رأسان

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$, $(3, 0)$, $(-3, 0)$ قطبان

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 13 - 9$

$c^2 = 4 \Rightarrow c = 2$, $(0, 2)$, $(0, -2)$ بؤرتان

$2a = 2(\sqrt{13}) = 2\sqrt{13}$ وحدة طول المحور الكبير $e = \frac{c}{a}$

$2b = 2(3) = 6$ وحدة طول المحور الصغير $e = \frac{2}{\sqrt{13}}$ اختلاف مركزي

$2c = 2(2) = 4$ وحدة البعد البؤري

③ $4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3} \,]\, \cdot \frac{3}{4}$ نقوم بجعل المعادلة بالوضع القياسي

$\frac{3x^2}{1} + \frac{9y^2}{4} = 1$ البسط يكون مقام المقام ،

$$\frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{4}{9}} = 1$$

نقوم بتوحيد المقامات لمعرفة اي المقامات اكبر

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{3}{9}, \frac{4}{9}$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

اذا توحدت المقامات البسط الاكبر هو العدد الاكبر
∴ المعادلة من النوع الثاني

$a^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$, $(0, \frac{2}{3})$, $(0, \frac{-2}{3})$ رأسان

$b^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$, $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0)$ قطبان

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{4-3}{9} = \frac{1}{9}$

$c^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$, $(0, \frac{1}{3})$, $(0, \frac{-1}{3})$ بؤرتان

$2a = 2(\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}$ وحدة

$2b = 2(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ وحدة

$2c = 2(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ وحدة

$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$

* ايجاد معادلة القطع الناقص.

① نقوم بتحديد النوع أن امكن وإلا نأخذ احتمالين

② نجد قيمتي a^2, b^2 من المعلومات المعطاة حتى تكون المعادلة.

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(3,0)$ ، $F_2(-3,0)$ ورأساه النقطتان $V_1(5,0)$ ، $(-5,0)$ ومركزه نقطة الاصل.

من خلال البؤرة نجد قيمة c ونحدد النوع

$F_1(3,0)$ بؤرة $\Rightarrow c=3 \Rightarrow c^2=9$

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

من خلال الرأس نجد قيمة a

$V_1(5,0)$ رأس $\Rightarrow a=5 \Rightarrow a^2=25$

$c^2=a^2-b^2$

$9=25-b^2 \Rightarrow b^2=25-9 \Rightarrow b^2=16$ ، معادلة قطع ناقص $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه النقطتان $(5,0)$ ، $(-5,0)$ وطول محوره الكبير يساوي (12) وحدة.

البؤرة نحدد النوع من خلالها كذلك نجد قيمة c

$(5,0)$ بؤرة $\Rightarrow c=5 \Rightarrow c^2=25$

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$2a=12 \Rightarrow a=6 \Rightarrow a^2=36$

$c^2=a^2-b^2$

$25=36-b^2 \Rightarrow b^2=36-25 \Rightarrow b^2=11$ ، معادلة قطع ناقص $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{11}=1$

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والمسافة بين بؤرتيه تساوي (8) وحدات ، ونصف محوره الصغير يساوي (3) وحدة.

$2c=8 \Rightarrow c=4 \Rightarrow c^2=16$

$\frac{1}{2}(2b)=3 \Rightarrow b=3 \Rightarrow b^2=9$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 16=a^2-9 \Rightarrow a^2=16+9 \Rightarrow a^2=25$

لم يحدد موقع القطع لذلك نأخذ احتمالين

$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ (البؤرة على السينات) ، $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$ (البؤرة على الصادات)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ومحوره الكبير على محور السينات وتبعد احدى بؤرتيه عن الرأسين بالعددين 2، 8 على الترتيب

* الرسم جداً ضروري لفهم السؤال

من خلال الرسم: جمع البعدين $= 2a$ ، طرح البعدين $= 2c$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (محورة الكبير على السينات)

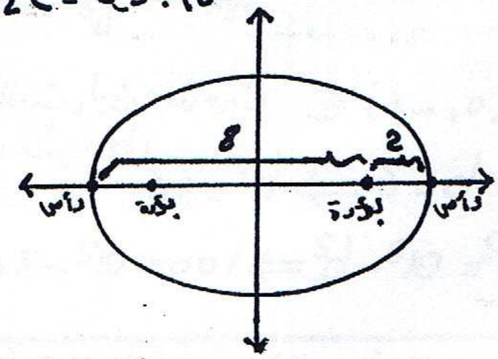
$2a=8+2 \Rightarrow 2a=10 \Rightarrow a=5 \Rightarrow a^2=25$

$2c=8-2 \Rightarrow 2c=6 \Rightarrow c=3 \Rightarrow c^2=9$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 9=25-b^2$

$b^2=25-9 \Rightarrow b^2=16$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$



س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل الذي احدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 1، 5 وحدة على الترتيب.

$2a=$ جمع البعدين $\Rightarrow 2a=5+1 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3 \Rightarrow a^2=9$

$2c=$ طرح البعدين $\Rightarrow 2c=5-1 \Rightarrow 2c=4 \Rightarrow c=2 \Rightarrow c^2=4$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 4=9-b^2 \Rightarrow b^2=9-4 \Rightarrow b^2=5$

لم يحدد موقع القطع نأخذ احتمالين

(البؤرة على محور الصادات) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ ، (البؤرة على محور السينات) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

واجب

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وتبعد احدى بؤرتيه عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 1، 9 وحدة على الترتيب

$\left[\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1,\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1\right]$ = ج.

* النقاط التي تقع على المحاور السيني او الصادي تسمى نقاط محورية والتي يكون احد احداثيها يساوي صفر فهي أما $(x,0)$ أو $(0,y)$

ملاحظة:

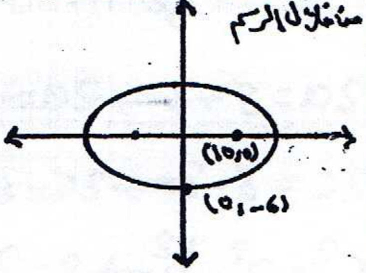
عند وجود نقطة محورية تمر او تقطع او تمس او تقع او تنتمي لقطع ناقص وقد كانت هناك بؤرة

1. اذا وافقت النقطة المحورية البؤرة من حيث الموقع فهي تمثل رأس اي a
2. اذا خالفت النقطة المحورية البؤرة من حيث الموقع فهي تمثل قطب اي b

∴ النقطة المحورية في القطع الناقص تكون أما رأس (a) أو قطب (b)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه (10,0) ويمر بالنقطة (0,-6)

يمكن معرفة النقطة تمثل قطب او رأس من خلال الرسم



(10,0) بؤرة → $c=10 \Rightarrow c^2=100$

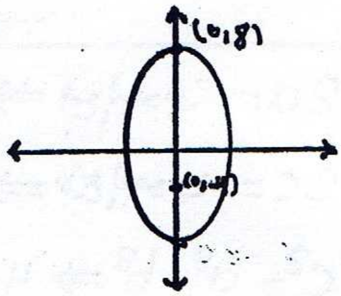
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$(0,-6) \in$ النقطة المحورية خالفت البؤرة من حيث الموقع فهي تمثل قطب (b)

$\therefore b=6 \Rightarrow b^2=36$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 100=a^2-36 \Rightarrow a^2=100+36 \Rightarrow a^2=136 , \frac{x^2}{136}+\frac{y^2}{36}=1$ المعادلة

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه (0,-4) ويمر بالنقطة (0,8)



(0,-4) بؤرة → $c=4 \Rightarrow c^2=16$

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$(0,8) \in$ النقطة المحورية وافقت البؤرة من حيث الموقع فهي تمثل رأس (a)

$\therefore a=8 \Rightarrow a^2=64$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 16=64-b^2 \Rightarrow b^2=64-16 \Rightarrow b^2=48 , \frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{64}=1$ المعادلة

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(\pm 3, 0)$ ويتقاطع مع محور الصادات عند $y=\pm 5$ ومركزه نقطة الاصل.

(3,0) بؤرة → $c=3 \Rightarrow c^2=9$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

* ملاحظة
① اذا قطع القطع المحور السيني سوف يكون النقطة (x,0)
② اذا قطع القطع المحور الصادي سوف يكون النقطة (0,y)

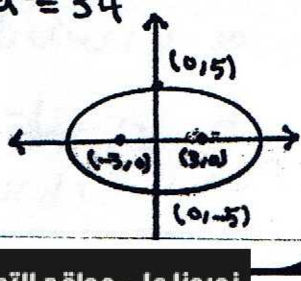
$(0,5) \in$ نقطة محورية خالفت البؤرة فهي تمثل قطب (b)

∴ في المثال اعلاه تكون النقاط (0,5) , (0,-5) لانه يقطع المحور الصادي

$b=5 \Rightarrow b^2=25$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 9=a^2-25 \Rightarrow a^2=9+25 \Rightarrow a^2=34$

$\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{25}=1$

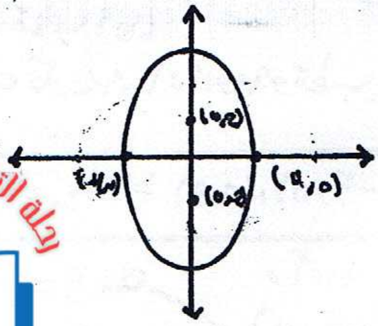


س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(0, \pm 2)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 4$ ومركزه نقطة الاصل.

$(0,2)$ بؤرة

$c = 2 \Rightarrow c^2 = 4$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$



∵ المنحني يقطع المحور السيني

∴ تتكون النقاط $(4,0), (-4,0)$

$(4,0) \in$ نقطة محورية خالفت البؤرة فهي تمثل قطب (b)

$b = 4 \Rightarrow b^2 = 16$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 4 = a^2 - 16 \Rightarrow a^2 = 4 + 16 \Rightarrow a^2 = 20$ ، المعادلة $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1$

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه $(0,4)$ ويمر بنقطتي تقاطع المنحني $x^2 + y^2 = 9$ مع محور السينات.

$(0,4)$ بؤرة

$c = 4 \Rightarrow c^2 = 16$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

* ملاحظة

① اذا قطع القطع المحور السيني هذا يعني أن $y = 0$ نعوضها لكي نجد قيمة x فتتكون النقطة $(x, 0)$

② اذا قطع القطع المحور الصادي هذا يعني أن $x = 0$ نعوضها لكي نجد قيمة y فتتكون النقطة $(0, y)$

∵ القطع قطع المحور السيني

∴ $y = 0$

$x^2 + 0 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \xRightarrow{\text{بالجذر}} x = \pm 3$ ، $(3,0), (-3,0)$

$(3,0) \in$ نقطة محورية خالفت البؤرة فهي تمثل قطب (b)

$b = 3 \Rightarrow b^2 = 9$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 16 = a^2 - 9 \Rightarrow a^2 = 16 + 9 \Rightarrow a^2 = 25$ ، المعادلة $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه $(3,0)$ ويمر بنقطتي تقاطع المنحني $x^2 + y^2 = 25$ مع محور الصادات.

$(3,0)$

$c = 3 \Rightarrow c^2 = 9$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

∵ القطع قطع المحور الصادي

∴ $x = 0$

$0 + y^2 = 25 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm 5$

$(0,5), (0,-5)$

$(0,5) \in$ نقطة محورية خالفت البؤرة فهي تمثل قطب (b)

$b = 5 \Rightarrow b^2 = 25$

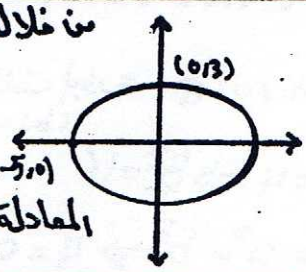
$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 9 = a^2 - 25 \Rightarrow a^2 = 9 + 25 \Rightarrow a^2 = 34$ ، المعادلة $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$

*** ملاحظة:**

① اذا مر القطع الناقص بنقطتين محوريه (احد احداثيها = صفر) بغض النظر الى الاشارة النقطة الاكبر تمثل رأس (a) والاصغر تمثل قطب (b)

② اذا مر القطع الناقص بنقطة واحدة محوريه فهي تكون اما رأس او قطب حسب السؤال

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والذي يمر بالنقاط $(0,3)$ ، $(-5,0)$



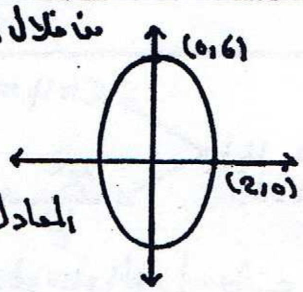
من خلال الرسم او الملاحظة اعلاه فان $a=5 \Rightarrow a^2=25$

رأس $(-5,0)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

قطب $(0,3) \Rightarrow b=3 \Rightarrow b^2=9$ ، المعادلة $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والذي يمر بالنقاط $(0,6)$ ، $(2,0)$



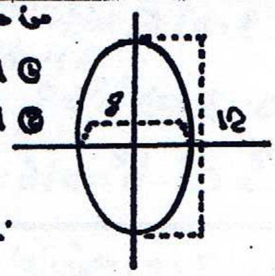
من خلال الرسم او الملاحظة اعلاه فان $a=6 \Rightarrow a^2=36$

رأس $(0,6)$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

قطب $(2,0) \Rightarrow b=2 \Rightarrow b^2=4$ ، المعادلة $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات ومن محور الصادات جزءاً طوله (12) وحدة ثم جد المسافة بين البؤرتين ومساحة منطقته ومحيطه



من خلال الرسم

① الجزء المقطوع الاكبر يكون $2a$ $\therefore 2a=12 \Rightarrow a=6 \Rightarrow a^2=36$

② الجزء المقطوع الاصغر يكون $2b$ $\therefore 2b=8 \Rightarrow b=4 \Rightarrow b^2=16$

$\because$ الجزء المقطوع الاكبر على المحور الصادي $\leftarrow$ $\therefore \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$\therefore$ المعادلة $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$

$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=36-16 \Rightarrow c^2=20 \Rightarrow c=\sqrt{20} \Rightarrow c=\sqrt{4\cdot 5}$$

$c=2\sqrt{5}$ $\therefore 2c=4\sqrt{5}$ وحدة المسافة بين البؤرتين

مساحة $A=ab\pi \Rightarrow A=(6)(4)\pi \Rightarrow A=24\pi$ وحدة مربعة

محيط $P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow P=2\pi\sqrt{\frac{36+16}{2}} \Rightarrow P=2\pi\sqrt{26}$ وحدة

س٤/ د٢/2012 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات ومساحة منطقته 24π وحدة مساحة

$A = ab\pi \Rightarrow 24\pi = ab\pi]\div\pi \Rightarrow ab = 24 \text{-----} ①$

مساحة

∵ القطع يقطع من محور السينات جزءاً طوله (8)

∴ الجزء المقطوع هو

أما $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

نعوض قيمة a في معادله ①

$4b = 24 \Rightarrow b = 6$ يهمل لان $a > b$ في القطع الناقص

أو $2b = 8 \Rightarrow b = 4$

نعوض قيمة b في معادله ①

$4a = 24 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a^2 = 36 \quad , b^2 = 16$

∵ الجزء المقطوع الاصغر على المحور السيني

∴ القطع من النوع الثاني اي على محور الصادات

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ معادلة القطع الناقص

* توجد اسئلة لا يمكن حلها الا بعد تكوين معادلتين من المعلومات المعطاة في السؤال ثم حلها آنياً بالحذف او بالتعويض.

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين البؤرتين (6) وحدات والفرق بين طولي المحورين يساوي (2) وحدة .

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (بؤرتاه على محور السينات)

$2c = 6 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow c^2 = 9$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 9 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 9 \text{----} ①$

$2a - 2b = 2]\div 2 \Rightarrow a - b = 1 \Rightarrow a = 1 + b \text{---} ②$ نعوض ② في ①

$(1+b)^2 - b^2 = 9$

$1 + 2b + \cancel{b^2} - \cancel{b^2} = 9 \Rightarrow 1 + 2b = 9 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$ نعوض قيمة b في معادلة ②

$\therefore a = 1 + 4 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow a^2 = 25 \quad , b^2 = 16$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واختلافه المركزي $=\frac{1}{2}$ وطول محوره الصغير (12) وحدة

$e=\frac{1}{2}$

ملاحظة: الاختلاف المركزي $=\frac{1}{2}$ هذا لايعني أن $a=2$ ، $c=1$ لان هذه نسبة

$e=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{1}{2} \Rightarrow a=2c$ ...... ①

$2b=12 \Rightarrow b=6 \Rightarrow b^2=36$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=a^2-36$ ...... ②

نعوض ① في ②

$c^2=(2c)^2-36 \Rightarrow c^2=4c^2-36 \Rightarrow 36=4c^2-c^2$

$3c^2=36 \Rightarrow c^2=12$ نعوض قيمة c^2 في معادلة ②

$12=a^2-36 \Rightarrow a^2=12+36 \Rightarrow a^2=48$ لم يحدد موقع القطع نأخذ احتمالين

$\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{36}=1$ (البؤرة على السينات) ، $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{48}=1$ (البؤرة على الصادات)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطة $(2\sqrt{5},2)$ وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (بؤرتاه على السينات)

* ملاحظة:
اذا مر القطع بنقطة كدديه نقوم بتعويضها مباشر في معادلة النوع لانها تحقق

$(2\sqrt{5},2) \in$ فهي تحقق

$\frac{(2\sqrt{5})^2}{a^2}+\frac{(2)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{20}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$ ...... ①

طول محوره الكبير = ضعف (طول محوره الصغير)

$2a=2(2b)] \div 2 \Rightarrow a=2b$ ...... ②

نعوض ② في ①

$\frac{20}{(2b)^2}+\frac{4}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{\cancel{4}b^2}+\frac{4}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{5}{b^2}+\frac{4}{b^2}=1$ نوحد مقامات

$\frac{5+4}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{9}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=9 \Rightarrow b=3$ نعوض قيمة b في ②

$\therefore a=2(3) \Rightarrow a=6 \Rightarrow a^2=36$

$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ معادلة قطع ناقص

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين $(6,2)$ ، $(3,4)$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (بؤرتاه على محور السينات)

$(6,2)\in$ تحقق $\Rightarrow \frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \text{ ......} (1) \;]\times 4$

$(3,4)\in$ تحقق $\Rightarrow \frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \text{ ......} (2)$

$\frac{144}{a^2}+\frac{16}{b^2}=4 \text{ ......} (1)$

$\mp\frac{9}{a^2}\mp\frac{16}{b^2}=\mp 1 \text{ ......} (2)$

بالطرح

$\frac{135}{a^2}=3$

$3a^2=135 \Rightarrow a^2=45$ نعوض قيمة a^2 في معادلة (2)

$\frac{9}{45}+\frac{16}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{1}{5}+\frac{16}{b^2}=1 \Rightarrow$ توحيد مقامات $\frac{b^2+80}{5b^2}=1$

$5b^2=b^2+80 \Rightarrow 5b^2-b^2=80 \Rightarrow 4b^2=80 \Rightarrow b^2=20$

$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ معادله قطع ناقص

س/ عامة جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الاصل ومساحته (7π) وحده مربعه ومحيطه يساوي (10π) وحده.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (بؤرتاه على محور السينات)

$P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow 10\pi=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\;]\div 2\pi \Rightarrow 5=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ بتربيع الطرفين

(P: محيط)

$25=\frac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow a^2+b^2=50 \text{ ----} (1)$ وسطين × طرفين

$A=ab\pi \Rightarrow 7\pi=ab\pi\;]\div\pi \Rightarrow ab=7 \Rightarrow b=\frac{7}{a} \text{ ----} (2)$

(A: مساحه)

$a^2+\left(\frac{7}{a}\right)^2=50$ نعوض (2) في (1)

يتبع

$a^2 + \frac{49}{a^2} = 50] \cdot a^2$

$a^4 + 49 = 50a^2 \Rightarrow a^4 - 50a^2 + 49 = 0$

$(a^2 - 49)(a^2 - 1) = 0$

$a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1$ نعوض في ① $\Rightarrow 1 + b^2 = 50 \Rightarrow b^2 = 49$ يهمل

لان في القطع الناقص دائماً " $a > b$

$a^2 - 49 = 0 \Rightarrow a^2 = 49$ نعوض في ① $\Rightarrow 49 + b^2 = 50 \Rightarrow b^2 = 1$

$\therefore \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1$ معادلة قطع ناقص

واجب

س/ جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل في كل مما يأتي.

① البؤرتان $F_1(2,0)$ ، $F_2(-2,0)$ والعدد الثابت = 6 وحدات ، $[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1]$ ج.

② بؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه (8) وحدات ومجموع طولي محوريه يساوي (16) وحدة $[\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1]$ ج.

③ بؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين $(6,2)$ ، $(4,3)$. $[\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1]$ ج.

④ احدى بؤرتيه $(0, 2\sqrt{3})$ ومساحة منطقته 8π وحدة مربعة . $[\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1]$ ج.

⑤ احدى بؤرتيه $(0,8)$ والنسبة بين طولي محوريه $= \frac{3}{5}$. $[\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1]$ ج.

ملاحظة النسبة تكون $\frac{2b}{2a} = \frac{3}{5}$ لان العدد الاصغر في البسط والاكبر في المقام.

⑥ بؤرتاه على محور الصادات النسبة بين طولي محوريه $= \frac{2}{3}$ والبعد بينهما $= 4$ ، $[\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1]$ ج.

⑦ المسافة بين بؤرتيه تساوي (6) وحدات ويمر بالنقطتين $(3,0)$ ، $(-3,0)$ ، $[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1]$ ج.

⑧ بؤرتاه $F_1(5,0)$ ، $F_2(-5,0)$ والنسبة بين طولي محوريه $\frac{1}{5}$ $[\frac{x^2}{\frac{625}{24}} + \frac{y^2}{\frac{25}{24}} = 1]$ ج.

⑨ يمر بنقطتي تقاطع المستقيم $4x + 3y = 12$ مع المحورين الاحداثيين . $[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1]$ ج.

⑩ أحد رأسيه $(0,-2)$ ويمر بالنقطة $(1, \frac{3}{2})$ $[\frac{x^2}{?} + \frac{y^2}{11} = 1]$ ج.

* القطوع المشتركه

① نضع القطع المطلوب في السؤال في جهة اليسار .

② نضع القطع الثاني في جهة اليمين ونبدأ به اولاً .

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات .

القطع المكافئ

$y^2 - 12x = 0$

$y^2 = 12x$ } مقارنة

$y^2 = 4px$

$4p = 12 \Rightarrow p = 3$

$F(3,0)$ بؤرة القطع المكافئ

وتمثل احدى بؤرتي القطع الناقص

القطع الناقص

$(3,0)$ بؤرة: $c = 3 \Rightarrow c^2 = 9$ ، $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$2b = 10 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow b^2 = 25$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 9 = a^2 - 25$

$a^2 = 9 + 25 \Rightarrow a^2 = 34$

$\frac{x^2}{34} + \frac{b^2}{25} = 1$ معادلة قطع ناقص

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة .

القطع المكافئ

$x^2 = 24y$ } مقارنة

$x^2 = 4py$

$4p = 24 \Rightarrow p = 6$

$F(0,6)$ بؤرة القطع المكافئ

وتمثل احدى بؤرتي القطع الناقص

القطع الناقص

$(0,6)$ بؤرة: $c = 6 \Rightarrow c^2 = 36$ ، $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 36 = a^2 - b^2$ ------①

$2a + 2b = 36] \div 2 \Rightarrow a + b = 18$

$a = 18 - b$ ------② نعوض ② في ①

$36 = (18-b)^2 - b^2 \Rightarrow 36 = 324 - 36b + b^2 - b^2$

$36b = 324 - 36 \Rightarrow 36b = 288 \Rightarrow b = 8$ نعوض قيمة b في ②

$\therefore a = 18 - 8 \Rightarrow a = 10 \Rightarrow a^2 = 100 \ , \ b^2 = 64 \ , \ \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ المعادلة

* ملاحظة: عند ذكر كلمة يمس او يمر او ينتمي الى الدليل نقوم بايجاد معادلة الدليل بعد المقارنة

① فاذا كانت معادلة الدليل مثلاً $x=5$ فتكون نقطة التماس هي $(5,0)$

② اما اذا كانت معادلة الدليل مثلاً $y=-3$ فتكون نقطة التماس هي $(0,-3)$

و هذه النقاط محوريه يمر بها القطع فهي اما رأس (a) أو قطب (b)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و بؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2+y^2-3x=16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2=12x$.

القطع المكافئ

مقارنة $\begin{cases} y^2=12x \\ y^2=4px \end{cases}$

$4p=12 \Rightarrow p=3$

الدليل $x=-3$

نقطة التماس $(-3,0)$

نقطة يمر بها القطع الناقص

القطع الناقص

∵ القطع يقطع محور الصادات

∴ $x=0$ ، راجع ص9

$x^2+y^2-3x=16$

$0+y^2-0=16$

$y^2=16 \Rightarrow y=\pm 4$

نقطتا تقاطع المنحني مع محور الصادات $(0,4),(0,-4)$ ويمثلان بؤرتان القطع الناقص

$(0,4)$ بؤرة → $c=4 \Rightarrow c^2=16$ ، $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

نقطة محوريه خالفت البؤرة من حيث الموقع $(-3,0)$ فهي تمثل قطب (b)

$b=3 \Rightarrow b^2=9$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 16=a^2-9 \Rightarrow a^2=16+9 \Rightarrow a^2=25$ ، المعادلة $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

س/2 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و احدى بؤرتيه $(3,0)$ وطول محوره الكبير يساوي البعد بين بؤرة القطع المكافئ $y^2=20x$ ودليله

القطع المكافئ

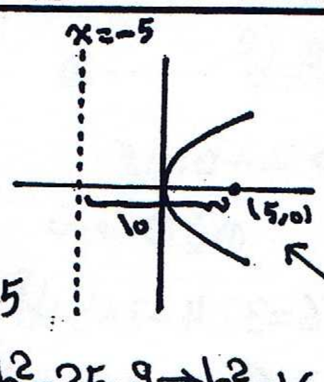
مقارنة $\begin{cases} y^2=20x \\ y^2=4px \end{cases}$

$4p=20 \Rightarrow p=5$ ، $(5,0)$ بؤرة

البعد بين بؤرة المكافئ ودليله تساوي $2p$

∴ $2p=2(5)=10$

وتمثل طول المحور الكبير $2a$



القطع الناقص

$(3,0)$ بؤرة → $c=3 \Rightarrow c^2=9$ ، $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$2a=10 \Rightarrow a=5 \Rightarrow a^2=25$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 9=25-b^2 \Rightarrow b^2=25-9 \Rightarrow b^2=16$

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ معادلة القطع الناقص

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والذي بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2+8x=0$ علماً أن القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

القطع المكافئ

$y^2+8x=0$

$y^2=-8x$

$y^2=-4px$

$4p=8 \Rightarrow p=2$

بؤرة المكافئ $(-2,0)$

وتمثل احدى بؤرتي الناقص

القطع الناقص

$(-2,0)$ بؤرة $\Rightarrow c=2 \Rightarrow c^2=4$ ، $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$(2\sqrt{3}, \sqrt{3}) \in$ القطع يمر بالنقطة لعدديه فهي تحقق

$\frac{(2\sqrt{3})^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{3})^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{12}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1$ ------ ①

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 4=a^2-b^2 \Rightarrow a^2=4+b^2$ ------ ②

نعوض ② في ①

$\frac{12}{4+b^2}+\frac{3}{b^2}=1$ نوحد مقامات

$\frac{12b^2+12+3b^2}{4b^2+b^4}=1 \Rightarrow 4b^2+b^4=15b^2+12$

$4b^2+b^4-15b^2-12=0 \Rightarrow b^4-11b^2-12=0$

$(b^2-12)(b^2+1)=0$

$b^2+1=0 \Rightarrow b^2=-1$ يهمل

$b^2-12=0 \Rightarrow b^2=12$ نعوض قيمة b^2 في ②

$\therefore a^2=4+12 \Rightarrow a^2=16$ ، $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ معادلة قطع ناقص

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ومركزه نقطة الاصل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2+8x=0$ عند النقطة التي احداثيها السيني يساوي (-2).

* ملاحظة: اذا علم الاحداثي السيني او الصادي لنقطة تقاطع اي منحني نعوض الاحداثي المعلوم في المعادلة المعلومة مباشر لكي نجد الاحداثي الآخر للنقطة وبذلك وجدنا نقطة التقاطع (x,y)

واذا كانت النقطة (x,y) عدديه نقوم بتعويضها مباشر في معادلة النوع لانها تحقق لاحدى النقاط فقط.

القطع المكافئ

$y^2+8x=0$

$\because x=-2$

$\therefore y^2+8(-2)=0$

$y^2-16=0$

$y^2=16 \Rightarrow y=\pm 4$

$(-2,4),(-2,-4)$

نقطتا تقاطع المكافئ مع الناقص

القطع الناقص

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (بؤرتاه على محور السينات)

القطع يقطع اي محور بنقطة كودديه $(-2,4)\in$

فهي تحقق

$\frac{(-2)^2}{a^2}+\frac{(4)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1$ .....①

(طول محوره الصغير) ضعف = طول محوره الكبير

$2a=2(2b)] \div 2$

$a=2b$ .....②

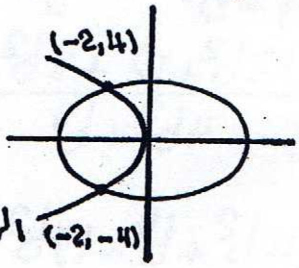
نعوض ② في ①

$\frac{4}{(2b)^2}+\frac{16}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{4b^2}+\frac{16}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{1}{b^2}+\frac{16}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{1+16}{b^2}=1$

$\frac{17}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=17$ نقوم بتربيع معادلة ② ثم تعويض قيمة b^2

$\therefore a=2b \Rightarrow a^2=4b^2 \Rightarrow a^2=4(17) \Rightarrow a^2=68.$

$\frac{x^2}{68}+\frac{y^2}{17}=1$ معادلة قطع ناقص



الرسم للتوضيح

واجب

س1 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2+16x=0$ ويمر ببؤرة القطع المكافئ $x^2-8y=0$ $[\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1]$ =ج.

س2 النقطة $(\frac{1}{3}, 2)$ تنتمي للقطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرة تنتمي لمحور السينات والتي هي احدى بؤرتي القطع الناقص وان النسبة بين طولي محوريه $(\frac{5}{4})$ ومركزه نقطة الاصل جد معادلتي المكافئ والناقص. ج= $[y^2=12x, \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1]$

س3 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ويمس دليلي القطعين المكافئين $x^2=-8y, y^2=16x$ $[\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1]$ =ج.

س4 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه $(4,0)$ وطول محوره الكبير يساوي البعد بين بؤرة القطع المكافئ $y^2=24x$ ودليله. $[\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1]$ =ج.

س5 لتكن $y^2+12x=0$, $y^2-12x=0$ معادلتي قطعين مكافئين جد بؤرة كل منهما ومعادلة دليل لهما ثم جد معادلة القطع الناقص بؤرتاه بؤرتي القطعين المكافئين وطول محوره الصغير = 10 وحدات $[\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{25}=1]$ =ج.

* ايجاد قيم الثوابت في معادلة القطع الناقص

① نقوم بجعل المعادلة بالصيغة القياسية اي جعل معامل x^2 ، y^2 وبعد المساوي جميعها تساوي واحد .

② نجد قيمتي a^2 ، b^2 ونقارن (اي نساوي) حسب معادلة النوع .

س/ لتكن $kx^2+4y^2=36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه $(\sqrt{3},0)$ جد قيمة $k\in R$.

$$kx^2+4y^2=36 \;]\div 36$$

$$\frac{kx^2}{36}+\frac{4y^2}{36}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{k}}+\frac{y^2}{9}=1$$

البسط يكون مقام للمقام

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{36}{k}$$

$$\Rightarrow b^2=9$$

$(\sqrt{3},0)$ بؤرة $\Rightarrow c=\sqrt{3} \Rightarrow c^2=3$

$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 3=a^2-9 \Rightarrow a^2=3+9 \Rightarrow a^2=12$$

$$\because a^2=\frac{36}{k} \Rightarrow 12=\frac{36}{k} \Rightarrow 12k=36 \Rightarrow k=3$$

س/ لتكن $kx^2+(k+1)y^2=12$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وطول محوره الاصغر $=2\sqrt{3}$ وحدة جد قيمة $k\in R$.

$$kx^2+(k+1)y^2=12 \;]\div 12$$

$$\frac{kx^2}{12}+\frac{(k+1)y^2}{12}=1$$

$$\frac{x^2}{\frac{12}{k}}+\frac{y^2}{\frac{12}{(k+1)}}=1$$

ملاحظة : اذا تساوة البسوط فالمقام الاصغر هو العدد الاكبر

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{12}{k}$$

$$b^2=\frac{12}{k+1}$$

$$2b=2\sqrt{3} \;]\div 2 \Rightarrow b=\sqrt{3} \Rightarrow b^2=3$$

$$\because b^2=\frac{12}{k+1} \Rightarrow 3=\frac{12}{k+1} \Rightarrow 3k+3=12 \Rightarrow 3k=9 \Rightarrow k=3$$

(وسطين x طرفين)

س/ قطع ناقص معادلته $hx^2+ky^2=36$ ومركزه نقطة الاصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60)، واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2=4\sqrt{3}x$ ما قيمة كل من $h,k \in R$.

القطع المكافئ

$y^2=4\sqrt{3}x$

$y^2=4px$

$4p=4\sqrt{3}$

$p=\sqrt{3}$

بؤرة المكافئ $(\sqrt{3},0)$

وتمثل احدى بؤرتي الناقص

القطع الناقص

$hx^2+ky^2=36 \;]\div 36$

$\frac{hx^2}{36}+\frac{ky^2}{36}=1$

$\frac{x^2}{\frac{36}{h}}+\frac{y^2}{\frac{36}{k}}=1 \Rightarrow a^2=\frac{36}{h}$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=\frac{36}{k}$

بؤرة $(\sqrt{3},0)$ $\Rightarrow c=\sqrt{3} \Rightarrow c^2=3$

$(2a)^2+(2b)^2=60$

$4a^2+4b^2=60 \;]\div 4 \Rightarrow a^2+b^2=15$ ----- ①

$\because c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 3=a^2-b^2 \Rightarrow a^2-b^2=3$ ----- ②

بالجمع

$2a^2=18 \Rightarrow a^2=9$ نعوض قيمة a^2 في معادلة ①

$9+b^2=15 \Rightarrow b^2=15-9 \Rightarrow b^2=6$

$\because a^2=\frac{36}{h} \Rightarrow 9=\frac{36}{h} \Rightarrow 9h=36 \Rightarrow h=4$

$\because b^2=\frac{36}{k} \Rightarrow 6=\frac{36}{k} \Rightarrow 6k=36 \Rightarrow k=6$

س/ واجب لتكن $4x^2+ky^2=36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومجموع طولي محوريه = 10 وحدات جد قيمة $k \in R$. [k = 9]=ج

س2/ لتكن $4x^2+2y^2=L$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل والبعد بين بؤرتيه يساوي $(2\sqrt{3})$ جد قيمة L . [L = 12]=ج

س3/ لتكن $8x^2+2y^2=k$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وكان مجموع مربعي طولي محوريه يساوي (40) جد قيمة k [k = 16]=ج

س4/ قطع ناقص $hx^2+ky^2=180$ مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتاه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2=16y$ وتبعد عن الرأس القريب عليها (2) وحدة جد قيمة h,k [h=9 , k=5]=ج

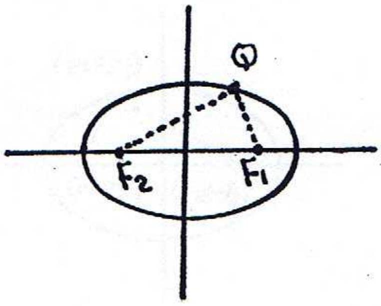
س5/ قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ومعادلته $hx^2+ky^2=12$ يمس دليل القطع المكافئ $x^2+4\sqrt{3}y=0$ واختلافه المركزي $\frac{\sqrt{3}}{2}$ جد قيمة h,k

[h=1 , k=4]=ج

* ملاحظة

حسب تعريف القطع الناقص أن اية نقطة تنتمي للقطع الناقص مثل Q بعدها عن البؤرة F_1 + بعدها عن البؤرة F_2 = طول المحور الكبير (عدد ثابت)

اي أن $(QF_1 + QF_2 = 2a)$

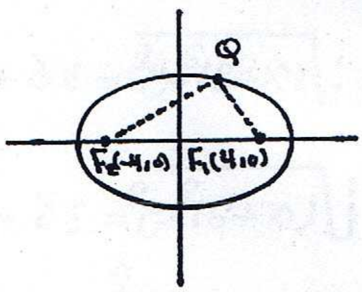


بما أن محيط المثلث = مجموع أطوال اضلاعه الثلاث (QF_1F_2)

$$\text{محيط المثلث} = \underbrace{QF_1 + QF_2}_{2a} + \underbrace{F_1F_2}_{2c}$$

$$\therefore \text{محيط المثلث} = 2a + 2c$$

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1(4,0)$ ، $F_2(-4,0)$ والنقطة Q تنتمي للقطع الناقص، بحيث أن محيط المثلث QF_1F_2 يساوي (24) وحدة.



$(4,0) \left\langle \begin{array}{l} c = 4 \Rightarrow c^2 = 16 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{array} \right.$

$2a + 2c =$ محيط المثلث

$2a + 2c = 24 \ ] \div 2$

$a + c = 12$ نعوض قيمة c

$a + 4 = 12 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow a^2 = 64$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 16 = 64 - b^2 \Rightarrow b^2 = 64 - 16 \Rightarrow b^2 = 48$

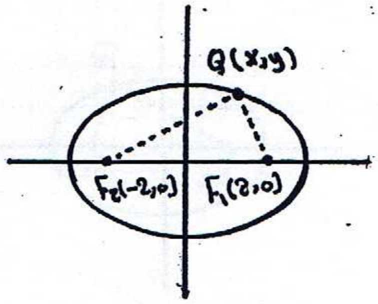
$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ معادلة قطع ناقص

* ايجاد معادلة القطع الناقص باستخدام التعريف.

س/ جد باستخدام التعريف معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(2,0)$ ، $F_2(-2,0)$ والعدد الثابت = 6 وحدات ومركزه نقطة الاصل.

لتكن $Q(x,y)$ تنتمي للقطع

$\therefore QF_1 + QF_2 = 2a$ حسب تعريف القطع



$$\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}=6$$

$$\left(\sqrt{(x-2)^2+y^2}\right)^2=\left(6-\sqrt{(x+2)^2+y^2}\right)^2$$ بتربيع الطرفين $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ قانون المسافة او البعد او الطول

$$(x-2)^2+y^2=36-12\sqrt{(x+2)^2+y^2}+(x+2)^2+y^2$$

$$x^2-4x+4+y^2=36-12\sqrt{(x+2)^2+y^2}+x^2+4x+4+y^2$$

$$12\sqrt{(x+2)^2+y^2}=36+4x+4x$$

$$12\sqrt{(x+2)^2+y^2}=36+8x\ ]\div 4$$

$$\left(3\sqrt{(x+2)^2+y^2}\right)^2=(9+2x)^2$$ بتربيع الطرفين

$$9(x^2+4x+4+y^2)=81+36x+4x^2$$

$$9x^2+36x+36+9y^2=81+36x+4x^2$$

$$9x^2+9y^2-4x^2=81-36$$

$$5x^2+9y^2=45\ ]\div 45$$

$$\frac{5x^2}{45}+\frac{9y^2}{45}=1$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$ معادلة قطع ناقص

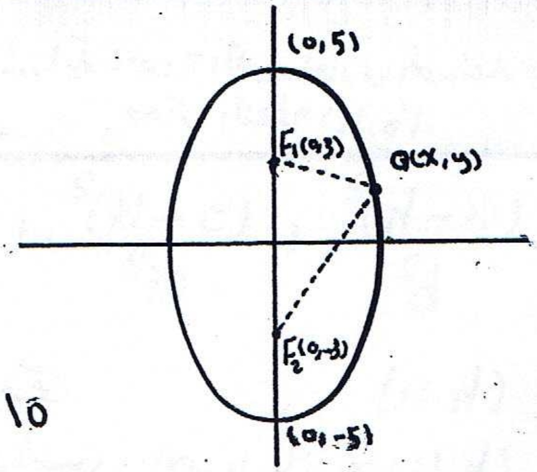
ملاحظة للتحقق من صحة الحل نقوم بالحل ليس بالتعريف فيكون نفس الحل (واجب الطالب)

س٩ جد باستخدام التعريف معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والمسافة بين بؤرتيه تساوي (6) وحدات ورأساه النقطتان (٠،٥) ، (٠،٥-) .

$(0,5) \Rightarrow a = 5 \Rightarrow 2a = 10$

$2c = 6 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow (0,3),(0,-3)$

البؤرتان على محور الصادات لان الرأسان على الصادات



لتكن $Q(x,y)$ تنتمي للقطع الناقص

$\therefore QF_1 + QF_2 = 2a$ تعريف القطع

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2} + \sqrt{(x-0)^2+(y+3)^2} = 10$$

$$\left(\sqrt{x^2+(y-3)^2}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{x^2+(y+3)^2}\right)^2$$ بتربيع الطرفين وفتح الاقواس

$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-6y+\cancel{9} = 100 - 20\sqrt{x^2+(y+3)^2} + \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+6y+\cancel{9}$$

$$20\sqrt{x^2+(y+3)^2} = 100 + 12y \quad] \div 4$$

$$\left(5\sqrt{x^2+(y+3)^2}\right)^2 = (25+3y)^2$$ بتربيع الطرفين

$$25(x^2+y^2+6y+9) = 625 + 150y + 9y^2$$

$$25x^2+25y^2+\cancel{150y}+225 = 625+\cancel{150y}+9y^2$$

$$25x^2+25y^2-9y^2 = 625-225$$

$$25x^2+16y^2 = 400 \quad] \div 400$$

$$\frac{25x^2}{400_{16}} + \frac{16y^2}{400_{25}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$ معادلة قطع ناقص

س١٠ واجب جد باستخدام التعريف معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(2,0)$ ، $F_2(-2,0)$ والعدد الثابت = 6 وحدات ومركزه نقطة الاصل

$$\left[\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1\right] = ج$$

س١١ جد باستخدام التعريف معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره الكبير يساوي (١٠) وحدات والبعد بين بؤرتيه = 8 وحدات والبؤرة على محور السينات .

$$\left[\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1\right] = ج$$

* انسحاب المحاور للقطع الناقص

عندما يكون المحور الكبير يوازي المحور السيني ومركزه النقطة (h,k)		عندما يكون محوره الكبير يوازي المحور الصادي ومركزه النقطة (h,k)	
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$		$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	
① مركز	(h,k)	① مركز	(h,k)
② رأسين	$(h+a,k),(h-a,k)$	② رأسين	$(h,k+a),(h,k-a)$
③ بؤرتين	$(h+c,k),(h-c,k)$	③ بؤرتين	$(h,k+c),(h,k-c)$
④ قطبين	$(h,k+b),(h,k-b)$	④ قطبين	$(h+b,k),(h-b,k)$
⑤ معادلة المحور الكبير	$y=k$	⑤ معادلة المحور الكبير	$x=h$
⑥ معادلة المحور الصغير	$x=h$	⑥ معادلة المحور الصغير	$y=k$

ملاحظة : يمكن اعتماد الاستنتاج والخلاصة ادناه وعدم استعمال الجدول

① كل احداثي سيني يضاف له h وكل احداثي صادي يضاف له k باستثناء معادلة القطع نطرح h,k

② اذا كان المحور منطبق على محور السينات او موازٍ له فمعادلته $y=k$

③ اذا كان المحور منطبق على محور الصادات او موازٍ له فمعادلته $x=h$

④ هذا الاستنتاج ممكن أن يستخدم في القطع المكافئ والناقص والزائد .

س/ عين المركز والرأسين والقطبين والبؤرتين وطول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الناقصة في كل مما يأتي والبعد البؤري ايضاً

① $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$

$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

h الحد المجاور الى x بعكس الاشارة.
k الحد المجاور الى y بعكس الاشارة.

$h=-3 , k=-2$

المركز $(h,k)=(-3,-2)$

طول المحور الكبير $a^2=25 \Rightarrow a=5 \Rightarrow 2a=10$ وحدة

رأسان $(-3,-2+5)=(-3,3)$ ، $(-3,-2-5)=(-3,-7)$

معادلة المحور الكبير $x=-3$

طول المحور الصغير $b^2=9 \Rightarrow b=3 \Rightarrow 2b=6$ وحدة

قطبان $(-3+3,-2)=(0,-2)$ ، $(-3-3,-2)=(-6,-2)$

معادلة المحور الصغير $y=-2$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=25-9$

البعد البؤري $c^2=16 \Rightarrow c=4 \Rightarrow 2c=8$ وحدة

بؤرتان $(-3,-2+4)=(-3,2)$ ، $(-3,-2-4)=(-3,-6)$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$

القطع قبل الانسحاب:
$(0,5),(0,-5)$ رأسان
$(3,0),(-3,0)$ قطبان
$(0,4),(0,-4)$ بؤرتان

② $9x^2+16y^2-72x-96y+144=0$

نقوم بوضع المعادلة قياسية وذلك حسب خطوات الحل الآتية

① نضع الحدود التي تحتوي على x معاً في قوس والحدود التي تحتوي على y معاً في قوس والحد المطلق يكون بعد اليساوي

$(9x^2-72x)+(16y^2-96y)=-144$

② نستخرج المشترك من هذه الاقواس بحيث يجب ان يكون معامل x^2 ، y^2 يساوي واحد

$9(x^2-8x)+16(y^2-6y)=-144$

③ نضيف (نصف معامل x أو y حسب القوس)^2 الى القوس والاضافة تضرب في خارج القوس وتضاف الى الطرف الثاني

$9(x^2-8x+16)+16(y^2-6y+9)=-144+144+144$
(اضافة) (اضافة)

④ نجعل داخل كل قوس مربع كامل وذلك باستخدام القانون (جذر الثالث ± جذر الاول)^2 حسب اشارة الوسط

$9(x-4)^2+16(y-3)^2=144] \div 144$

⑤ نقسم على العدد الموجود بعد اليساوي لكي تكون المعادلة قياسية

$\frac{9(x-4)^2}{144}+\frac{16(y-3)^2}{144}=1$ (16 ، 9)

← تابع

$$\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$h=4 \ , \ k=3$

المركز $(h,k)=(4,3)$

$a^2=16 \Rightarrow a=4 \Rightarrow 2a=8$ وحدة طول المحور الكبير

$(4+4,3)=(8,3)$ رأسان

$(4-4,3)=(0,3)$

معادلة المحور الكبير $y=3$

$b^2=9 \Rightarrow b=3 \Rightarrow 2b=6$ وحدة طول المحور الصغير

$(4,3+3)=(4,6)$ قطبان

$(4,3-3)=(4,0)$

معادلة المحور الصغير $x=4$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=16-9$

$c^2=7 \Rightarrow c=\sqrt{7} \Rightarrow 2c=2\sqrt{7}$ وحدة البعد البؤري

$(4+\sqrt{7},3)$ بؤرتان

$(4-\sqrt{7},3)$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

القطع قبل الانسحاب

$(4,0),(-4,0)$ رأسان

$(0,3),(0,-3)$ قطبان

$(\sqrt{7},0),(-\sqrt{7},0)$ بؤرتان

---

③ $x^2+25y^2+4x-150y+204=0$ نتبع خطوات السؤال السابق

$(x^2+4x)+(25y^2-150y)=-204$

$(x^2+4x)+25(y^2-6y)=-204$

$(x^2+4x+4)+25(y^2-6y+9)=-204+4+225$ (اضافة، اضافة)

$(x+2)^2+25(y-3)^2=25 \ ] \div 25$

$$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{25(y-3)^2}{25}=1$$

$$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{1}=1$$
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$h=-2, \ k=3$

المركز $(h,k)=(-2,3)$

← يتبع

التطبيق قبل الانسحاب

$a^2=25 \Rightarrow a=5 \Rightarrow 2a=10$ وحدة طول المحور الكبير

$(5,0),(-5,0)$ رأسان

$(-2+5,3)=(3,3)$ رأسان

$(-2-5,3)=(-7,3)$

معادلة المحور الكبير $y=3$

$b^2=1 \Rightarrow b=1 \Rightarrow 2b=2$ وحدة طول المحور الصغير

$(0,1),(0,-1)$ قطبان

$(-2,3+1)=(-2,4)$ قطبان

$(-2,3-1)=(-2,2)$

معادلة المحور الصغير $x=-2$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=25-1$

$c^2=24 \Rightarrow c=\sqrt{24} \Rightarrow c=2\sqrt{6} \Rightarrow 2c=4\sqrt{6}$ وحدة البعد البؤري

$(2\sqrt{6},0),(-2\sqrt{6},0)$ بؤرتان

$(-2+2\sqrt{6},3)$ بؤرتان

$(-2-2\sqrt{6},3)$

$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ الاختلاف المركزي

---

④ $25x^2+50x+16y^2=1575$

$25(x^2+2x)+16y^2=1575$

$25(x^2+2x+1)+16y^2=1575+25$

اضافة

$25(x+1)^2+16y^2=1600]\div 1600$

$\frac{25(x+1)^2}{1600}+\frac{16y^2}{1600}=1$

$\frac{(x+1)^2}{64}+\frac{(y-0)^2}{100}=1$ اكمل الحل واجب

ج = [$(-1,0)$ مركز ، $(-1,10),(-1,-10)$ رأسان

$(7,0),(-9,0)$ قطبان ، $(-1,6),(-1,-6)$ بؤرتان

$2a=20,\ 2b=16,\ 2c=12$

$x=-1$ معادلة الصغير ، $y=0$ معادلة الكبير ، $e=\frac{3}{5}$ اختلاف مركزي]

---

⑤ $\frac{(x-4)^2}{81}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$

ج = [$(4,-1)$ مركز ، $(13,-1),(-5,-1)$ رأسان

$(4,4),(4,-6)$ قطبان ، $(4+\sqrt{56},-1),(4-\sqrt{56},-1)$ بؤرتان

$2a=18,\ 2b=10,\ 2c=2\sqrt{56},\ e=\frac{\sqrt{56}}{9}$

$x=4$ معادلة الصغير ، $y=-1$ معادلة الكبير]

---

⑥ $9x^2+25y^2-54x-100y-44=0$

ج = [$(3,2)$ مركز ، $(8,2),(-2,2)$ رأسان

$(3,5),(3,-1)$ قطبان ، $(7,2),(-1,2)$ بؤرتان

$2a=10,\ 2b=6,\ 2c=8$

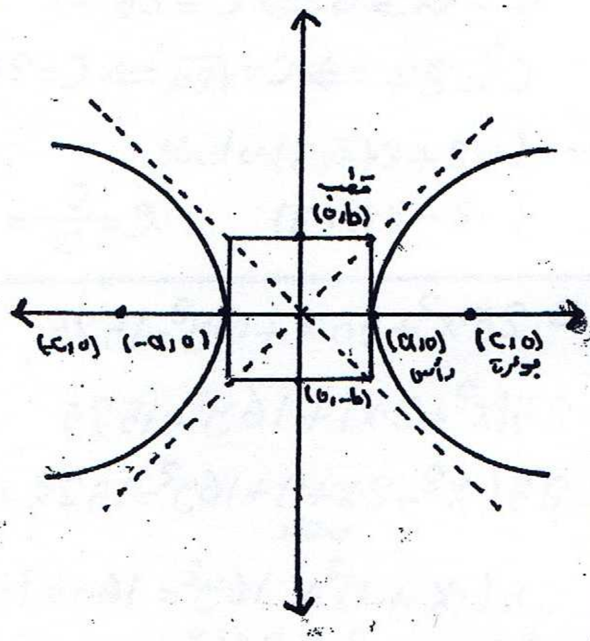
$e=\frac{4}{5}$ ، $x=3$ معادلة الصغير ، $y=2$ معادلة الكبير]

* القطع الزائد

القطع الزائد: هو مجموعة النقط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي اي منهما عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) يساوي عدداً ثابتاً (2a)

النوع الاول

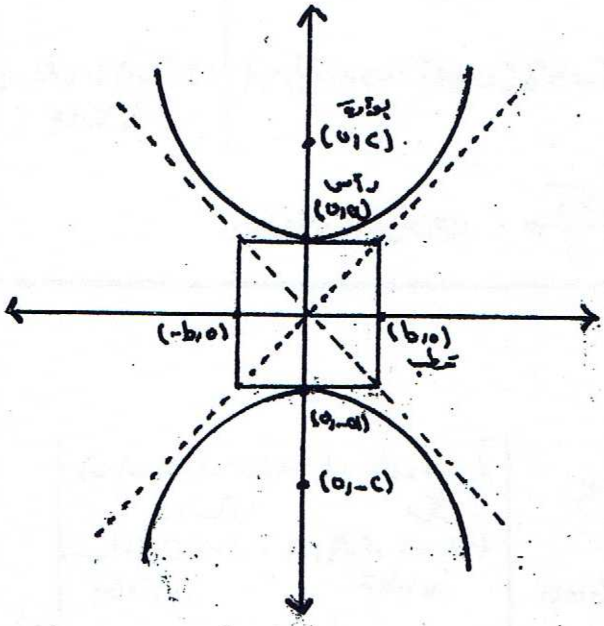
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



رأسان	$(a,0),(-a,0)$
بؤرتان	$(c,0),(-c,0)$
قطبان	$(0,b),(0,-b)$
طول المحور الحقيقي	$2a$
طول المحور التخيلي (المرافق)	$2b$
البعد البؤري	$2c$
الاختلاف المركزي	$e=\frac{c}{a}>1$

النوع الثاني

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$



رأسان	$(0,a),(0,-a)$
بؤرتان	$(0,c),(0,-c)$
قطبان	$(b,0),(-b,0)$
طول المحور الحقيقي	$2a$
طول المحور التخيلي (المرافق)	$2b$
البعد البؤري	$2c$
الاختلاف المركزي	$e=\frac{c}{a}>1$

العلاقة $c^2=a^2+b^2$

عناصر القطع a,b,c

- اما $a>b$
- أو $b>a$
- أو $a=b$

* c تكون اكبر العناصر دائماً

* ملاحظات حول القطع الزائد

① اذا كان معامل x^2 موجب فالمعادلة من النوع الاول (البؤرة والرأس على السينات)

② اذا كان معامل y^2 موجب فالمعادلة من النوع الثاني (البؤرة والرأس على الصادات)

③ a^2 دائماً مقام للكسر الاول ، b^2 دائماً مقام للكسر الثاني التغير يكون في البسط

④ البؤرة لا يمر بها القطع وانما تقع خارج القطع

⑤ اذا مر القطع الزائد بنقطة محوريه اي احد احداثيها (0) ← $(0,y),(x,0)$ فهي تمثل رأس (a)

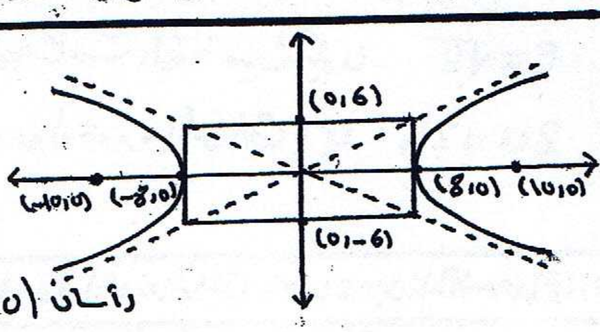
⑥ مساحة المستطيل المركزي $= 4ab$

⑦ يسمى $2a$ ←
- المسافة بين الرأسين.
- طول المحور الحقيقي
- البعد الثابت (العدد الثابت)
- مطلق الفرق بين بعدي أية نقطة تنتمي للقطع الزائد عن بؤرتيه.

س/ عين الرأسين والقطبين والبؤرتين وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق للقطوع الزائدة والذي مركزه نقطة الاصل والبعد البؤري لكل من القطوع الآتية.

---

① $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$a^2=64 \Rightarrow a=8$ ، رأسان $(8,0),(-8,0)$

$b^2=36 \Rightarrow b=6$ ، قطبان $(0,6),(0,-6)$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=64+36 \Rightarrow c^2=100$

$c=10$ ، بؤرتان $(10,0),(-10,0)$

$2a=2(8)=16$ وحدة طول المحور الحقيقي ، $e=\frac{c}{a}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}>1$ الاختلاف المركزي

$2b=2(6)=12$ وحدة طول المحور المرافق

$2c=2(10)=20$ وحدة البعد البؤري

② نضع المعادلة قياسية

$$16y^2 - 9x^2 = 144 \,] \div 144$$

$$\frac{16y^2}{144} - \frac{9x^2}{144} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1 \\ \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1 \end{array}\right\}$$

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$, $(0,3), (0,-3)$ رأسان

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$, $(4,0), (-4,0)$ قطبان

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 16 \Rightarrow c^2 = 25$

$c = 5$, $(0,5), (0,-5)$ بؤرتان

$2a = 2(3) = 6$ وحدة طول المحور الحقيقي ، $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} > 1$ الاختلاف المركزي

$2b = 2(4) = 8$ وحدة طول المحور المرافق

$2c = 2(5) = 10$ وحدة البعد البؤري

---

* ملاحظة

① نلاحظ في السؤال الاول أن $a > b$
② نلاحظ في السؤال الثاني أن $b > a$

أما في القطع الناقص دائماً تكون $a > b$ مهمة

* ملاحظة اذا كانت $a = b$

① يسمى هذا القطع عندما تكون $a = b$ بالقطع الزائد القائم او المتساوي الاضلاع

② يكون الاختلاف المركزي فيه ثابت القيمة حيث يكون $e = \sqrt{2}$

③ طول محوره الحقيقي = طول محوره المرافق اي $2a = 2b$

السؤال الآتي يبين ذلك .

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره المرافق 4 وحدات وبؤرتاه $(0,-\sqrt{8}), (0,\sqrt{8})$

تكملة الى السؤال
ثم جد الاختلاف المركزي وماذا يسمى هذا النوع من القطع .

$(0,\sqrt{8})$ بؤرة $\rightarrow c = \sqrt{8} \Rightarrow c^2 = 8$

$\rightarrow \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$2b = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow b^2 = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 8 = a^2 + 4 \Rightarrow a^2 = 8 - 4 \Rightarrow a^2 = 4$, $a = 2$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$

$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$ قطع زائد قائم او متساوي الاضلاع

$e = \sqrt{2}$ الاختلاف المركزي ثابت القيمة

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره الحقيقي = 6 وحدات والاختلاف المركزي يساوي (2) والبؤرتان على محور السينات.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ (بؤرتاه على محور السينات)

$2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$

$e = 2 \quad , e = \frac{c}{a} \Rightarrow 2 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 2a \Rightarrow c = 2(3)$ نعوض قيمة a

$c = 6 \Rightarrow c^2 = 36$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 36 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 36 - 9 \Rightarrow b^2 = 27 , \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$

معادلة القطع الزائد

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق $2\sqrt{2}$ وحدة واختلافه المركزي يساوي (3)

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$ (بؤرتاه على محور الصادات)

$2b = 2\sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2} \Rightarrow b^2 = 2$

$e = 3 \quad , e = \frac{c}{a} \Rightarrow 3 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 3a$ ------ ①

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + 2$ ------ ② نعوض ① في ②

$(3a)^2 = a^2 + 2 \Rightarrow 9a^2 = a^2 + 2 \Rightarrow 9a^2 - a^2 = 2 \Rightarrow 8a^2 = 2$

$a^2 = \frac{2}{8} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \quad , \quad \frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{2} = 1$ معادلة القطع الزائد

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره الحقيقي (12) وحدة وطول محوره المرافق (10) وحدة وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين.

$2a = 12 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a^2 = 36$

$2b = 10 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow b^2 = 25$ لم يحدد النوع نعوض بأخذ احتماليين.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (البؤرة على السينات) , $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ (البؤرة على الصادات)

$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1 \qquad \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1$

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل اذا علمت أن بعده البؤري يساوي 12 وحدة ومطلق الفرق بين بعدي اي نقطة تنتمي اليه عن بؤرتيه = 8 وحدات ورأساه على محور الصادات.

$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ (الرأساه على الصادات)

$2c=12 \Rightarrow c=6 \Rightarrow c^2=36$

$2a=8 \Rightarrow a=4 \Rightarrow a^2=16$

مطلق الفرق

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 36=16+b^2 \Rightarrow b^2=36-16 \Rightarrow b^2=20$ ، $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{20}=1$ المعادلة

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ويمر بالنقطة (3,0) وبعده البؤري = 10

* ملاحظة: اذا مر القطع الزائد بنقطة محورية اي احد احداثيها = صفر، (x,0) أو (0,y) فهي تمثل رأس (a)

$(3,0)$ رأس $\rightarrow a=3 \Rightarrow a^2=9$ ، $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$2c=10 \Rightarrow c=5 \Rightarrow c^2=25$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 25=9+b^2 \Rightarrow b^2=25-9 \Rightarrow b^2=16$ ، $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ المعادلة

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما $(\pm5,0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x=\pm3$ ومركزه نقطة الاصل.

$(\pm5,0)$ بؤرة $\rightarrow c=5 \Rightarrow c^2=25$ ، $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

∵ القطع يتقاطع مع محور السينات عند $x=\pm3$ راجع ص18 س3

∴ سوف يكون النقطتان $(-3,0)$ ، $(3,0)$

∵ هذه النقاط محوريه يمر بها القطع (يقطعها)

∴ تمثل راس للقطع الزائد (a)

$\therefore a=3 \Rightarrow a^2=9$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 25=9+b^2 \Rightarrow b^2=25-9 \Rightarrow b^2=16$ ، $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ المعادلة

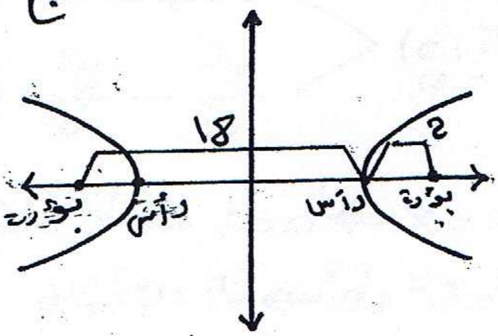
س/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات اذا علمت أن احد رأسيه يبعد عن بؤرتيه بالعددين 2 ، 18 على الترتيب وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين .

ملاحظة

① الرسم جداً ضروري لفهم السؤال

② من خلال الرسم ممكن أن نستنتج:

- جمع البعدين $= 2c$
- طرح البعدين $= 2a$



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (بؤرتاه على السينات)

$2c = 18 + 2 \Rightarrow 2c = 20$

$c = 10 \Rightarrow c^2 = 100$

$2a = 18 - 2 \Rightarrow 2a = 16 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow a^2 = 64$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 100 = 64 + b^2 \Rightarrow b^2 = 100 - 64 \Rightarrow b^2 = 36$

$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ معادلة القطع الزائد

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل اذا علمت أن احد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 9 ، 1 على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين.

$2c =$ جمع البعدين $\Rightarrow 2c = 9 + 1 \Rightarrow 2c = 10 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow c^2 = 25$

$2a =$ طرح البعدين $\Rightarrow 2a = 9 - 1 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a^2 = 16$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 16 + b^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 16 \Rightarrow b^2 = 9$

لم يحدد موقع القطع نأخذ احتمالين .

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ (البؤرة على السينات) ، $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ (البؤرة على الصادات)

X القطوع المشتركة

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2=20x$, $y^2=-20x$ وطول محوره المرافق يساوي 8 وحدات ومركزه نقطة الاصل.

القطع المكافئ

$y^2=20x$
$y^2=4px$ مقارنة

$4p=20$

$p=5$

بؤرة المكافئ $(5,0)$ وتمثل احدى بؤرتي القطع الناقص

القطع المكافئ

$y^2=-20x$
$y^2=-4px$ مقارنة

$4p=20$

$p=5$

بؤرة المكافئ $(-5,0)$ وتمثل احدى بؤرتي القطع الناقص

القطع الزائد

بؤرة $(5,0)$ ← $c=5 \Rightarrow c^2=25$ ، $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$2b=8 \Rightarrow b=4 \Rightarrow b^2=16$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 25=a^2+16$

$a^2=25-16 \Rightarrow a^2=9$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ معادلة القطع الزائد

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد الذي معادلته $x^2-3y^2=12$ والنسبة بين طولي محوريه $=\frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الاصل.

القطع الزائد

$x^2-3y^2=12] \div 12$

$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$ ($12 \to a^2$ ، $4 \to b^2$)

$c^2=a^2+b^2$

$c^2=12+4 \Rightarrow c^2=16$

$c=4$

$(4,0),(-4,0)$ بؤرتا الزائد ويمثلان بؤرتا الناقص

القطع الناقص

بؤرة $(4,0)$ ← $c=4 \Rightarrow c^2=16$ ، $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{2a}{2b}=\frac{5}{3}$ (5 ← كبير ، 3 ← صغير) $\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{5}{3} \Rightarrow 3a=5b$

$a=\frac{5b}{3}$ ...... ①

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 16=a^2-b^2$ ...... ② نعوض ① في ②

$16=(\frac{5b}{3})^2-b^2 \Rightarrow 16=\frac{25b^2}{9}-b^2] \times 9$

$144=25b^2-9b^2 \Rightarrow 144=16b^2 \Rightarrow b^2=\frac{144}{16} \Rightarrow b^2=9$ نعوض ثانياً في ②

$16=a^2-9 \Rightarrow a^2=16+9 \Rightarrow a^2=25$

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ معادلة القطع الناقص

*ملاحظة اذا كانت النسبة $\frac{3}{5}$ (3 ← صغير ، 5 ← كبير) فتكون $\frac{2b}{2a}$

س: جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\frac{1}{2}$

القطع الناقص

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ، $25 \to a^2$ ، $9 \to b^2$

$c^2=a^2-b^2$

$c^2=25-9 \Rightarrow c^2=16$

$c=4 \Rightarrow (4,0),(-4,0)$ بؤرتا الناقص

ويمثلان بؤرتا الزائد

القطع الزائد

$(4,0)$ بؤرة $\rightarrow c=4 \Rightarrow c^2=16$ ، $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{2a}{2c}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2a=c$ نعوض قيمة c

$2a=4 \Rightarrow a=2 \Rightarrow a^2=4$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 16=4+b^2 \Rightarrow b^2=16-4$

$b^2=12$ ، $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ معادلة قطع زائد

س: قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(1,2\sqrt{5})$ ، $(1,-2\sqrt{5})$ جد معادلتي القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل والقطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل.

القطع المكافئ

بما ان القطع يمر بالنقطتين

$(1,-2\sqrt{5}),(1,2\sqrt{5})$

الاحداثي السيني ثابت القيمة والاشارة المعادلة من النوع الاول

$y^2=4px$

$\because (1,2\sqrt{5}) \in$ فهي تحقق

$(2\sqrt{5})^2=4p(1) \Rightarrow 4p=20$

$p=5$ ، $(5,0)$ بؤرة المكافئ

وتمثل احدى بؤرتي الزائد

$\therefore y^2=4(5)x$

$y^2=20x$ معادلة القطع المكافئ

القطع الزائد

$(5,0)$ بؤرة $\rightarrow c=5 \Rightarrow c^2=25$ ، $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$2a=6 \Rightarrow a=3 \Rightarrow a^2=9$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 25=9+b^2$

$b^2=25-9 \Rightarrow b^2=16$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ معادلة قطع زائد

س: وزاري 2005/د جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ويمر ببؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{29}=1$ ونسبة البعد بين بؤرتيه وطول محوره المرافق كنسبة $\frac{5}{4}$

$\left[\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{400}=1\right]=2$.

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2+12y=0$

القطع الناقص

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ($9 \to b^2$ ، $25 \to a^2$)

$c^2=a^2-b^2$

$c^2=25-9$

$c^2=16 \Rightarrow c=4$

$(0,4),(0,-4)$ بؤرتا الناقص ويمثلان بؤرتا الزائد

القطع المكافئ

ملاحظة: راجع ص 26 حول مس الدليل

$x^2+12y=0$

$x^2=-12y$
$x^2=-4py$ } مقارنة

$4p=12 \Rightarrow p=3$

$y=3$ معادلة دليل

$(0,3)$ نقطة تماس

القطع الزائد

$(0,4)$ → $c=4 \Rightarrow c^2=16$ ، $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

$(0,3)$ نقطة محورية تمس (يمر) بها القطع الزائد فهي تمثل رأس (a)

$\therefore a=3 \Rightarrow a^2=9$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 16=9+b^2$

$b^2=16-9 \Rightarrow b^2=7$

$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$ معادلة القطع الزائد

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل والذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ويمر الزائد ببؤرتي القطع الناقص نفسه

القطع الناقص

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ($25 \to a^2$ ، $9 \to b^2$)

$a^2=25 \Rightarrow a=5$

$(5,0),(-5,0)$ رأسا الناقص ويمثلان بؤرتاه القطع الزائد

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=25-9$

$c^2=16 \Rightarrow c=4$

$(4,0),(-4,0)$ بؤرتا الناقص ويمر بهما القطع الزائد وبما أنهما نقاط محورية

$\therefore$ يمثلان رأسا القطع الزائد

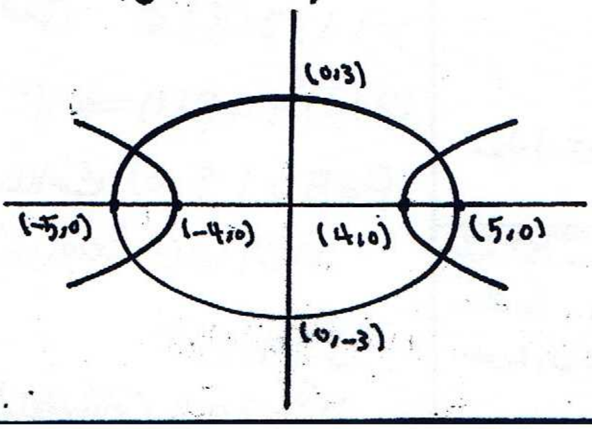
القطع الزائد

$(5,0)$ بؤرة → $c=5 \Rightarrow c^2=25$ ، $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$(4,0) \Rightarrow a=4 \Rightarrow a^2=16$ رأس

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 25=16+b^2 \Rightarrow b^2=25-16$

$b^2=9$ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ معادلة القطع الزائد



* **ملاحظة:** اذا مر القطع الناقص ببؤرة القطع الزائد او بالعكس فأن

① بؤرة الناقص (c) = رأس الزائد (a)

② رأس الناقص (a) = بؤرة الزائد (c)

س (عامة) قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وقطع زائد نقطة تقاطع محوريه نقطة الاصل، كل منهما يمر ببؤرة الآخر فاذا كانت $9x^2+25y^2=225$ معادلة قطع ناقص جد

① مساحة ومحيط القطع الناقص ② معادلة القطع الزائد والاختلاف المركزي لكل منهما مع الرسم

القطع الناقص

$$9x^2+25y^2=225 \;]\div 225$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

$25 \to a^2$ ، $9 \to b^2$

$a^2=25 \Rightarrow a=5$

$(5,0),(-5,0)$ رأسا الناقص وتمثلان بؤرتا الزائد

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=25-9$

$c^2=16 \Rightarrow c=4$

$(4,0),(-4,0)$ بؤرتا الناقص وتمثلان رأسا الزائد

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}<1$

$b^2=9 \Rightarrow b=3$ ، $(0,3),(0,-3)$ قطبا الناقص

$A=ab\pi \Rightarrow A=(5)(3)\pi$ مساحة

$A=15\pi$ وحدة مربعة

$P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ محيط

$P=2\pi\sqrt{\frac{25+9}{2}} \Rightarrow P=2\pi\sqrt{17}$ وحدة

القطع الزائد

$(5,0)$ بؤرة $\Rightarrow c=5 \Rightarrow c^2=25$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

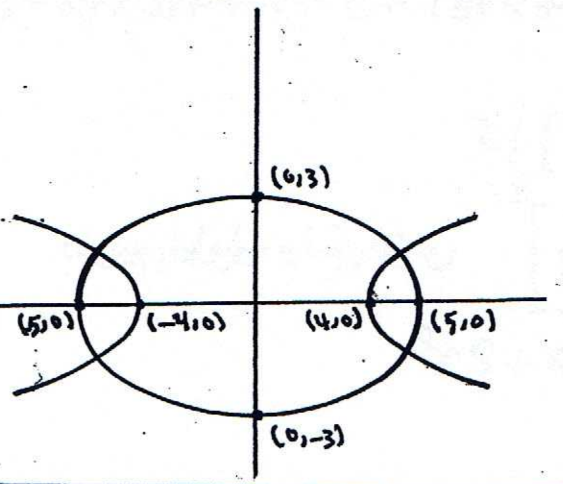
$(4,0)$ رأس $\Rightarrow a=4 \Rightarrow a^2=16$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 25=16+b^2$

$b^2=25-16 \Rightarrow b^2=9$

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ معادلة القطع الزائد

$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}>1$ الاختلاف المركزي



س 2016/2 جد معادلة القطع الزائد والناقص اذا كان كل منهما يمر ببؤرتي الآخر وكلاهما تقعان على محور السينات وطول المحور المرافق يساوي $6\sqrt{2}$ وحدة طول وطول محوره الحقيقي يساوي 6 وحدة طول

ج = [قطع ناقص $\frac{x^2}{} + \frac{y^2}{} = 1$ ، $\frac{x^2}{} - \frac{y^2}{} = 1$ قطع زائد]

* استخدام التعريف لإيجاد معادلة القطع الزائد

القطع الزائد: هو مجموعة النقط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي أي منها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) يساوي عدد ثابت ($2a$)

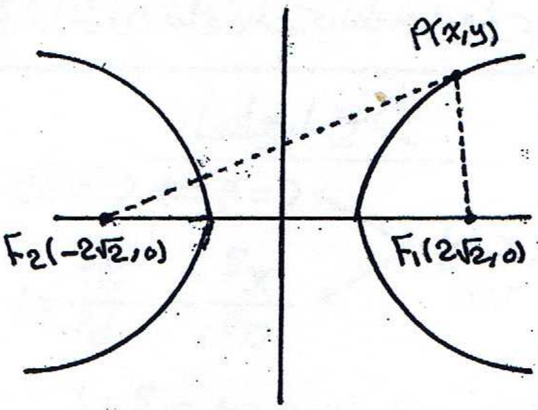
س/ جد باستخدام تعريف معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتيه ($0 , 2\sqrt{2}$) ، ($0 , -2\sqrt{2}$) وينطبق محوراه على المحورين الإحداثيين والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي أية نقطة عن بؤرتيه يساوي (4) وحدات.

لتكن $P(x,y)$ تنتمي للقطع

$\therefore \left|PF_1 - PF_2\right| = 2a$ تعريف القطع (مطلق فرق)

$PF_1 - PF_2 = \pm 2a$

عند رفع المطلق نضع إشارة موجبة وسالبة للطرف الثاني



$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ قانون البعد او المسافة او الطول بين نقطتين

$\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+(y-0)^2} = \pm 4$

$\left[\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+y^2}\right]^2 = \left[\pm 4 + \sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2}\right]^2$ بتربيع الطرفين

$(x-2\sqrt{2})^2+y^2 = 16 \pm 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2} + (x+2\sqrt{2})^2+y^2$

$x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 + y^2 = 16 \pm 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2} + x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2$

$\mp 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2} = 16 + 8\sqrt{2}x \;] \div 8$

$\left[\mp\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2}\right]^2 = \left[2 + \sqrt{2}x\right]^2$ بتربيع الطرفين وفتح القوس

$x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2 = 4 + 4\sqrt{2}x + 2x^2$

$x^2 + y^2 - 2x^2 = 4 - 8$

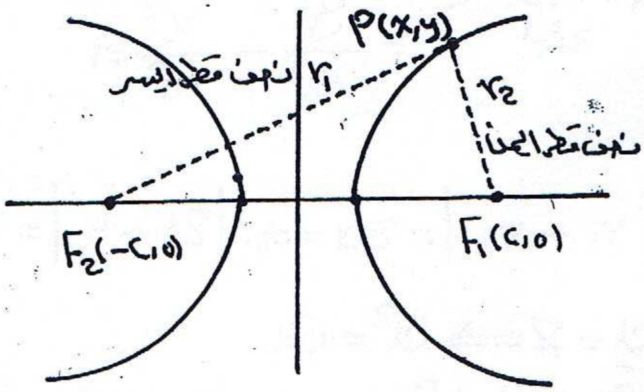
$-x^2 + y^2 = -4 \;] \div (-4) \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ قطع زائد قائم ومتساوي الأضلاع

* ملاحظة: أن أية نقطة تنتمي الى منحني القطع الزائد مثل $P(x,y)$ لها نصفي قطرين بؤريين هما PF_1 نصف قطر اليمين، PF_2 نصف قطر أيسر

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

بصورة أخرى



لإيجاد نصف القطر

① يجب توفر نقطة معلومة $P(x,y)$ وبؤرة ثم نطبق القانون $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

② او توفر نصف قطر احدهما مع طول محور الحقيقي ثم نطبق $|r_1-r_2|=2a$

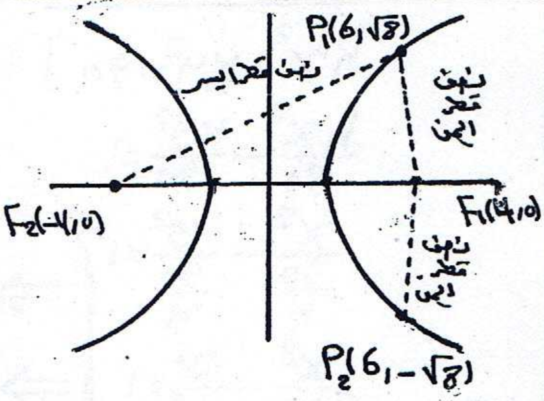
س/ النقطة $P(6,L)$ تنتمي للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومعادلته $x^2-3y^2=12$ جد كلاً من ① قيمة L ② طول نصف القطر البؤري المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة P.

$(\overset{x}{6},\overset{y}{L}) \in$ للقطع $\Rightarrow$ تحققها

$(6)^2-3(L)^2=12 \Rightarrow 36-3L^2=12$

$36-12=3L^2 \Rightarrow 3L^2=24 \Rightarrow L^2=8$

$L=\pm\sqrt{8}$ قيمة L ، $(6,\sqrt{8})$ ، $(6,-\sqrt{8})$ النقاط



لعدم توفر البؤرتين نقوم بإيجاد البؤرتين

$x^2-3y^2=12\,] \div 12$

$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$ ، $12 \to a^2$ ، $4 \to b^2$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=12+4 \Rightarrow c^2=16 \Rightarrow c=4$ ، $F_1(4,0)$ ، $F_2(-4,0)$ البؤرتان

$P_1F_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(6-4)^2+(\sqrt{8}-0)^2}=\sqrt{4+8}=2\sqrt{3}$ وحدة

$P_2F_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(6-4)^2+(-\sqrt{8}-0)^2}=\sqrt{4+8}=2\sqrt{3}$ وحدة

س٤/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (10 ، 0) ، (-10 ، 0) ويتعقبي القطرين البؤريين لاحدى نقاطه هما 5 ، 21 وحدة .

$(0, 10)$ بؤرة $\Rightarrow$ $c = 10 \Rightarrow c^2 = 100$ ، $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

$$|r_1 - r_2| = 2a \Rightarrow |21 - 5| = 2a \Rightarrow 16 = 2a$$

$$a = 8 \Rightarrow a^2 = 64$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 100 = 64 + b^2 \Rightarrow b^2 = 36 ,$$

المعادلة $\dfrac{y^2}{64} - \dfrac{x^2}{36} = 1$

س/ قطع زائد مركزه نقطة الاصل ومعادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي $(6\sqrt{2})$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمة كل من $h, k \in R$.

القطع الناقص

$$9x^2 + 16y^2 = 576] \div 576$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$a^2 = 64$ ، $b^2 = 36$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 64 - 36 \Rightarrow c^2 = 28$$

$$c = \sqrt{28}$$

$(\sqrt{28}, 0) , (-\sqrt{28}, 0)$

بؤرتا القطع الناقص ويمثلان بؤرتا القطع الزائد

القطع الزائد

$$hx^2 - ky^2 = 90] \div 90$$

$$\frac{hx^2}{90} - \frac{ky^2}{90} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\Rightarrow a^2 = \dfrac{90}{h}$ ، $\Rightarrow b^2 = \dfrac{90}{k}$

$(\sqrt{28}, 0)$ بؤرة $\Rightarrow$ $c = \sqrt{28} \Rightarrow c^2 = 28$

$$2a = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 18$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 28 = 18 + b^2 \Rightarrow b^2 = 10$$

$$\because a^2 = \frac{90}{h} \Rightarrow 18 = \frac{90}{h} \Rightarrow 18h = 90 \Rightarrow h = 5$$

$$\because b^2 = \frac{90}{k} \Rightarrow 10 = \frac{90}{k} \Rightarrow 10k = 90 \Rightarrow k = 9$$

س/ لتكن $h = 5y^2 - 4x^2$ قطع زائد احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $4y - 5x^2 = 0$ جد قيمة h

$[\, h = \frac{4}{45} \,]$ = 2٠

س / وزاري

قطع زائد $hy^2 - kx^2 = 576$ احد رأسيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2=24y$ والنسبة بين طول محوره المرافق الى البعد بين بؤرتيه $\frac{4}{5}$ جد قيمة $h, k \in R$

$[h=16 \,,\, k=9]$ = ج.

س: قطع زائد معادلته $hx^2 - ky^2 = 25$ وقطع ناقص معادلته هي $9x^2 + 25y^2 = 225$ فاذا كانت بؤرتا كل منهما رأسين للآخر فما قيمة $h, k \in R$

$[h=\frac{25}{16} \,,\, k=\frac{25}{9}]$ = ج.

---

* انسحاب المحاور للقطع الزائد

	عندما يكون المحور الكبير يوازي المحور السيني ومركزه النقطة (h,k)	عندما يكون المحور الكبير يوازي المحور الصادي ومركزه النقطة (h,k)
المعادلة	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
المركز	(h,k)	(h,k)
رأسين	$(h+a,k),(h-a,k)$	$(h,k+a),(h,k-a)$
بؤرتين	$(h+c,k),(h-c,k)$	$(h,k+c),(h,k-c)$
قطبين	$(h,k+b),(h,k-b)$	$(h+b,k),(h-b,k)$
معادلة المحور الحقيقي	$y=k$	$x=h$
معادلة المحور المرافق	$x=h$	$y=k$

س/ عين المركز والرأسين والقطبين والبؤرتين وطول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي والبعد البؤري للقطوع الزائدة في كل مما يأتي .

① $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

h الحد المجاور الى x بعكس الاشارة

k الحد المجاور الى y بعكس الاشارة

$h = -2 , k = 1$

المركز $(h , k) = (-2 , 1)$

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow 2a = 6$ وحدة طول المحور الحقيقي

$(-2+3 , 1) = (1 , 1)$ رأسان

$(-2-3 , 1) = (-5 , 1)$

معادلة المحور الحقيقي $y = 1$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow 2b = 4$ وحدة طول المحور المرافق

$(-2 , 1+2) = (-2 , 3)$ قطبان

$(-2 , 1-2) = (-2 , -1)$

معادلة المحور المرافق $x = -2$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 4$

$c^2 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13} \Rightarrow 2c = 2\sqrt{13}$ وحدة البعد البؤري

$(-2+\sqrt{13} , 1)$ بؤرتان

$(-2-\sqrt{13} , 1)$ ، الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

القطع قبل الانسحاب:
$(3,0),(-3,0)$ رأسان
$(0,2),(0,-2)$ قطبان
$(\sqrt{13},0),(-\sqrt{13},0)$ بؤرتان

② $2(y+1)^2 - 4(x-1)^2 = 8 \;] \div 8$

$\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{2} =$

$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

$h = 1 , k = -1$

المركز $(h , k) = (1 , -1)$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2a = 4$ وحدة طول المحور الحقيقي

$(1 , -1+2) = (1 , 1)$ رأسان

$(1 , -1-2) = (1 , -3)$

معادلة المحور الحقيقي $x = 1$

$b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2} \Rightarrow 2b = 2\sqrt{2}$ طول المحور المرافق

$(1+\sqrt{2} , -1)$ قطبان

$(1-\sqrt{2} , -1)$

معادلة المحور المرافق $y = -1$

القطع قبل الانسحاب:
$(0,2),(0,-2)$ رأسان
$(\sqrt{2},0),(-\sqrt{2},0)$ قطبان

← يتبع

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 2$

$c^2 = 6 \Rightarrow c = \sqrt{6} \Rightarrow 2c = 2\sqrt{6}$ البعد البؤري وحدة

$(1, -1+\sqrt{6})$ بؤرتان

$(1, -1-\sqrt{6})$ ، $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ الاختلاف المركزي

قبل الانسحاب

$(0, \sqrt{6}), (0, -\sqrt{6})$

---

③ $16x^2 + 18y - 9y^2 + 160x - 185 = 0$ نقوم بوضع المعادلة قياسية وذلك حسب خطوات الحل الآتية.

① نضع الحدود التي تحتوي على x معاً في قوس والحدود التي تحتوي على y معاً في قوس والحد المطلق نضعه بعد يساوي .

$16x^2 + 160x - 9y^2 + 18y = 185$

② نستخرج المشترك من هذه الأقواس بحيث يجب أن يكون معامل x^2 و y^2 يساوي واحد

$16(x^2 + 10x) - 9(y^2 - 2y) = 185$

③ نضيف (نصف معامل x أو y حسب القوس)^2 الى القوس والاضافة تضرب في خارج القوس وتضاف الى الطرف الثاني .

$16(x^2 + 10x + 25) - 9(y^2 - 2y + 1) = 185 + 400 - 9$

اضافة   اضافة

④ نجعل داخل كل قوس مربع كامل وذلك باستخدام القانون (جذر اول ± جذر ثالث)^2 حسب اشارة الوسط

$16(x+5)^2 - 9(y-1)^2 = 576 \,] \div 576$

⑤ نقسم على العدد الموجود بعد يساوي لكي تكون المعادلة قياسية

$\frac{(x+5)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{64} = 1$ مقارنة

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$h = -5 \; , \; k = 1$

$(h, k) = (-5, 1)$ المركز

$a^2 = 36 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow 2a = 12$ طول المحور الحقيقي وحدة

$(-5+6, 1) = (1, 1)$ رأسان

$(-5-6, 1) = (-11, 1)$

معادلة المحور الحقيقي $y = 1$

$b^2 = 64 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow 2b = 16$ طول المحور المرافق وحدة

$(-5, 1+8) = (-5, 9)$ قطبان

$(-5, 1-8) = (-5, -7)$

معادلة المحور المرافق $x = -5$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 36 + 64$

$c^2 = 100 \Rightarrow c = 10 \Rightarrow 2c = 20$ وحدة البعد البؤري

$(-5+10, 1) = (5, 1)$ بؤرتان

$(-5-10, 1) = (-15, 1)$ ، $e = \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} > 1$ الاختلاف المركزي

القطع قبل الانسحاب

$(6, 0), (-6, 0)$ رأسان

$(0, 8), (0, -8)$ قطبان

$(10, 0), (-10, 0)$

نفس خطوات لحل السؤال السابق

⑭ $9x^2-4y^2-54x+8y+113=0$

$9x^2-54x-4y^2+8y=-113$

$9(x^2-6x)-4(y^2-2y)=-113$

$9(x^2-6x+9)-4(y^2-2y+1)=-113+81-4$

$9(x-3)^2-4(y-1)^2=-36] \div (-36)$

$\frac{(x-3)^2}{-4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ اعادة ترتيب

$\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-3)^2}{4}=1$

تكملة حل السؤال واجب للطالب

[رأسان $(3,-2),(3,4)$ ، مركز $(3,1)$
$(3,1-\sqrt{3}),(3,1+\sqrt{3})$ بؤرتان ، $(1,1),(5,1)$ قطبان
$2a=6$, $2b=4$, $2c=2\sqrt{13}$
$x=3$ معادلة المحور الحقيقي $e=\frac{\sqrt{13}}{3}$
$y=1$ معادلة المحور الافقي] = ج.

اسئلة واجب (حول الفصل)

س1/ قطع مخروطي بؤرتاه $(-4,0)$ ، $(4,0)$ واختلافه المركزي (2) جد معادلته.

س2/ جد معادلة القطع المخروطي الذي مركزه نقطة الاصل و اختلافه المركزي $\sqrt{2}$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2=-12y$

س3/ جد معادلة القطع المخروطي الذي محوراه على المحورين الاحداثيين والذي احد رؤوسه النقطة $(3,0)$ واحدى بؤرتيه النقطة $(-5,0)$.

س4/ قطع مخروطي الفرق بين طولي محوريه يساوي صفر والمسافة بين بؤرتيه (8) جد معادلته.

س5/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ومحوراه على المحورين الاحداثيين ويمر ببؤرة القطع المكافئ $y^2=16x$ ومساحة منطقة القطع الناقص (20π) وحدة مربعة. $[\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1]$ = ج.

س6/ قطع ناقص معادلته $4x^2+2y^2=L$ والبعد بين بؤرتيه $2\sqrt{3}$ وحدة جد قيمة L
$[L=12]$ = ج.

س7/ جد معادلة القطع الناقص الذي يمر ببؤرتي القطع الزائد $9y^2-16x^2=144$ ويقطع من محور السينات جزءاً طوله 12 وحدة
$[\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1]$ = ج.

س8/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والبعد بين بؤرتيه مساوياً للبعد بين بؤرة القطع المكافئ $y^2=-24x$ ودليله اذا علمت أن مساحة منطقة القطع الناقص تساوي (80π) وحدة مربعة وبؤرتيه على محور السينات
$[\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1]$ = ج.

س9 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ويمس دليلي القطعين المكافئين $x^2=-8y$, $y^2=16x$

$\left[\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1\right]$ = ج.

س10 جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه النقطتان $(3,0),(-3,0)$ والنسبة بين طولي محوريه $\frac{1}{3}$

$\left[\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1}=1\ ,\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{81}=1\right]$ = ج.

س11 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور السينات وطولا نصفي القطرين البؤريين المرسومين من النقطة $(9, 4\sqrt{5})$ هما 21 , 9 ومركزه نقطة الاصل

$\left[\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1\right]$ = ج.

س12 جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويقطع القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{68}+\frac{y^2}{17}=1$ عند النقطة التي احداثيها السيني يساوي (-2)

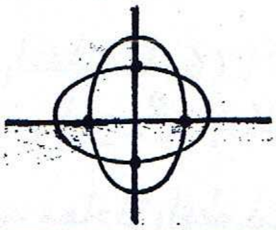
$\left[y^2=-8x\right]$ = ج.

س13 قطع زائد مركزه نقطة الاصل وأحد رأسيه هو بؤرة القطع المكافئ $y^2=-4(x-3)$ وأحد بؤرتيه هي رأس القطع المكافئ نفسه

$\left[\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1\right]$ = ج.

س14 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ويمر بنقطتي تقاطع المستقيم $2x+y=8$ مع المحورين الاحداثيين.

س15 قطعان كلاهما ناقص كل منهما يمر ببؤرة الآخر فاذا كانت معادلة احدهما $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ جد معادلة القطع الآخر



$\left[\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1\right]$ = ج.

س16 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ومجموع طولي محوريه = 16 وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته $x^2-2y^2=6$.

$\left[\frac{x^2}{\frac{5329}{256}}+\frac{y^2}{\frac{3025}{256}}=1\right]$ = ج.

س17 $L=hy^2+3x^2$ قطع ناقص يمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x+y=\sqrt{3}$ مع محور الصادات علماً أن مساحة القطع الناقص $2\sqrt{3}\pi$ وحدة مساحة جد $h, L \in R$ حيث بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الاصل.

$[L=12,\ h=4]$ = ج.

* اختبار الفصل الثاني (يرجى من الطالب بعدم ترك الاختبار لكي يعرف مدى استيعابه لمادة الفصل)

الاختبار الأول:

س1/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومساحته (7π) وحدة مربعة ومحيطه (10π) وحدة.

س2/ عرف القطع المكافئ ثم جد باستخدام التعريف معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (0 ، 7) والرأس في نقطة الاصل.

س3/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2+12y=0$

س4/ جد المركز والرأسين والقطبين والبؤرتين وطول ومعادلة كل من المحورين والبعد البؤري والاختلاف المركزي للقطع الزائد $16x^2+18y-9y^2+160x-185=0$

س5/ قطع ناقص معادلته $hx^2+ky^2=36$ ومركزه نقطة الاصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2=4\sqrt{3}x$ ما قيمة كلاً من $h,k\in R$.

الاختبار الثاني:

س1/ النقطة (L ، 6) p تنتمي للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومعادلته $x^2-3y^2=12$ جد كلاً من ① قيمة L ② طول نصف القطر البؤري الايمن للنقطة p.

س2/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والذي بؤرتاه على محور السينات وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2+8x=0$ عند النقطة التي احداثيها السيني (2-).

س3/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد الذي معادلته $x^2-3y^2=12$ والنسبة بين طولي محوريه $=\frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الاصل.

س4/ قطع زائد مركزه نقطة الاصل ومعادلته $hx^2-ky^2=90$ وطول محوره الحقيقي ($6\sqrt{2}$) وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2+16y^2=576$ جد قيمة كلاً من $h,k\in R$

س5/ قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات واحدى بؤرتيه هو بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين ($1,2\sqrt{5}$)، ($1,-2\sqrt{5}$) جد معادلتي القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل والقطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل.

الاختبار الثالث :

س1 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وتبعد احدى بؤرتيه عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 1 ، 5 على الترتيب .

س2 جد قيمة A وبؤرة ودليل القطع المكافئ الذي معادلته $Ax^2+8y=0$ المار بالنقطة -(1 ، 2) ثم ارسم القطع .

س3 قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وقطع زائد نقطة تقاطع محوريه نقطة الاصل كل منهما يمر ببؤرة الآخر فاذا كان $9x^2+25y^2=225$ معادلة قطع ناقص فجد كلاً من
① مساحة ومحيط القطع الناقص ② معادلة القطع الزائد والاختلاف المركزي لكل منهما مع الرسم

س4 عين المركز والرأسين والقطبين والبؤرتين وطول ومعادلة كلا من المحورين والبعد البؤري والاختلاف المركزي للقطع الناقص $9x^2+16y^2-72x-96y+144=0$

س5 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2+y^2-3x=16$ مع محور السينات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2=12x$

الاختبار الرابع :

س1 ناقش القطع المكافئ $y^2+4y+2x=-6$

س2 اذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة (4 ، 3-) ورأسه في نقطة الاصل جد معادلته علماً أن بؤرته تنتمي لاحد المحورين .

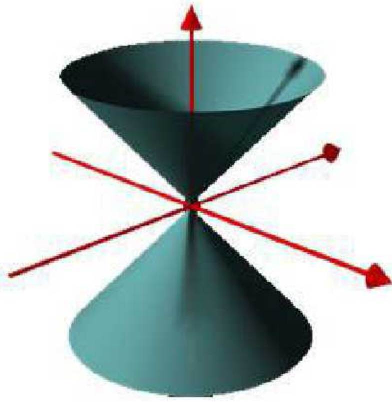
س3 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2+8x=0$ علماً أن القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

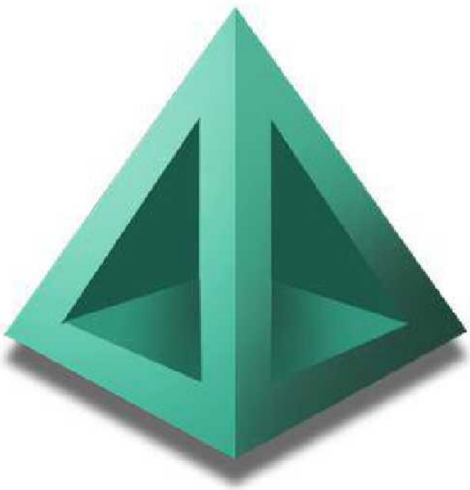
س4 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2=24y$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة .

س5 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين (6 ، 2) ، (3 ، 4)

2017

رحلة التفوق في السادس
عطاءُ بلا حدود





إعداد الأستاذ: عبدالكريم جبر

مساعد الطالب في
الرياضيات
للصف السادس العلمي

الفصل الثالث
تطبيقات التفاضل

@رحلة التفوق في السادس

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿وقل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون﴾

انطلاقا من قول المصطفى (ص): ((زكاة العلم نشرهُ وتعليمهُ))

تضع شبكة مواقع رحلة التفوق في السادس التعليمية التربوية الخيرية بين ايديكم احدى اعمالها من ملازم مرحلة السادس الأعدادي هذه المرحلة الهامة والمصيرية في حياة اعزائنا الطلبة وخاصة المتعففين منهم ولمن يتعذر عليه اقتناء هذه المساعدات المدرسية في محافظاتنا العراقية العزيزة بهدف النهوض وتطوير الواقع التعليمي ولو بالجزء اليسير.

إذ أن شبكتنا لاتقتصر عاى نشر الملازم المدرسية فقط أنما تقوم بنشر الدروس المرئية المجانية لأكفأ التدريسيين بالأضافة الى مجموعة قنواتنا التدريسية وكذلك الأرشادات والنصائح وطرق الدراسة الصحيحة هذا من جهة. أما من جهة أخرى فهو كسر لشوكة بعض المحسوبين على الكادر التدريسي ممن يرفضون نشر ملازمهم والتعاون مع ابنائهم الطلبة ليأخذوا من المال هدفا أهم ويتناسوا مصلحة الطالب والواقع التعليمي المتدني.

علماً ان كادر الشبكة والقائمين عليها هم مجموعة من الشباب العراقي الواعي المثقف بالأضافة الى تعاون بعض المدرسين الكرام كما واننا غير تابعين لأي جهة كانت رسمية او غير رسمية انما سر تجمعنا وعملنا هو خيري بحت أملين من الله عز وجل ان يوفقنا لتقديم كل ما هو صالح لشعبنا و وطننا الحبيب.

كادر شبكة رحلة التفوق في السادس

٢٠١٥/٨/٢١

ا.د : اشرف الوائلي

ا.د : مينا الاحمد

الفصل الثالث التفاضل

٠٧٨٠٣٠٠٢١٤٠
استاذ عبد الكريم جبر

* المشتقات ذات الرتب العليا .

الدالة	المشتقة الاولى	المشتقة الثانية	المشتقة الثالثة	المشتقة الرابعة
$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(4)}(x)$
y	y'	y''	y'''	$y^{(4)}$
y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^4y}{dx^4}$
y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$

قواعد ايجاد المشتقة .

اولاً $y = a \Rightarrow y' =$ صفر ، $a \in R$

صفر = مشتقة الثابت

Ex

① $y = 5 \Rightarrow y' = 0$

② $y = \sqrt{3} \Rightarrow y' = 0$

③ $y = 4^3 \Rightarrow y' = 0$

ثانياً $y = x^n \Rightarrow y' = n x^{n-1}$

Ex

① $y = x^4 \Rightarrow y' = 4x^3$

② $y = x^{-5} \Rightarrow y' = -5x^{-6}$

③ $y = x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow y' = \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}$ ⟶ $\frac{\text{البسط} - \text{١المقام}}{\text{المقام}} = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$

④ $y = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y = x^{\frac{2}{3}}$ (أس: 2 ، دليل: 3)

نقوم بتحويل الدالة الجذرية الى دالة أسية وذلك بقسمة $\frac{\text{الداخل}}{\text{الخارج}}$

ثالثاً

$y = ax^n \Rightarrow y' = anx^{n-1}$

دالة × الثابت = y

مشتقة الدالة × الثابت = y'

Ex

① $y = 5x^2 \Rightarrow y' = 5(2x) \Rightarrow y' = 10x$

ممكن عدم كتابة هذه الخطوة

② $y = 3x^{-3} \Rightarrow y' = -9x^{-4}$ ③ $y = 3x \Rightarrow y' = 3$

رابعاً

المشتقة تتوزع على الجمع والطرح بشرط أن لا تكون الدالة داخل قوس مرفوع الى أس.

Ex

① $y = 3 + x^5 - 2x^4$

$y' = 5x^4 - 8x^3$

② $y = x^3 - 4x^{-2} + 5x - 8 \Rightarrow y' = 3x^2 + 8x^{-3} + 5$

خامساً

مشتقة حاصل ضرب دالتين

$y = g(x) \cdot h(x)$

$y' = g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x)$

مشتقة الاولى × الثانية + مشتقة الثانية × الاولى

Ex

① $y = (2x^4 - 3x)(4 + 6x)$

$y' = (2x^4 - 3x) \cdot (6) + (4 + 6x)(8x^3 - 3).$

② $y = 2x(4x^2 + 5)$

عند وجود متغير او عدد مضروب في قوس يفضل فتح القوس ثم الاشتقاق.

$y = 8x^3 + 10x \Rightarrow y' = 24x^2 + 10$

سادساً

مشتقة قسمة دالتين

$y = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow y' = \frac{(\text{المقام}) \times (\text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط}) \times (\text{مشتقة المقام})}{(\text{المقام})^2}$

Ex

① $y = \frac{2x^2 + 3x}{5x - 1} \Rightarrow y' = \frac{(5x-1)(4x+3) - (2x^2+3x)(5)}{(5x-1)^2}$

② $y = \frac{x}{x^2 + 3} \Rightarrow y' = \frac{(x^2+3)(1) - (x)(2x)}{(x^2+3)^2}$

سابعاً $y = (\text{دالة})^n \Rightarrow y' = n(\text{نفس الدالة})^{n-1} \times (\text{مشتقة داخل قوس})$

مشتقة دالة داخل قوس مرفوعة إلى قوة.

Ex

① $y = (x^3 + 2x - 7)^5 \Rightarrow y' = 5(x^3 + 2x - 7)^4 \times (3x^2 + 2).$

② $y = \sqrt[3]{(x^5 - 6x)^5}$ تحويل الجذر إلى دالة أسية

$y = (x^5 - 6x)^{\frac{5}{3}} \Rightarrow \frac{5}{3}(x^5 - 6x)^{\frac{2}{3}} \times (5x^4 - 6).$

---

* ملاحظة خاصة في اشتقاق الجذر التربيعي

$y = \sqrt{\text{دالة}} \Rightarrow y' = \dfrac{\text{مشتقة داخل الجذر}}{2\sqrt{\text{نفس الجذر}}}$

Ex

① $y = \sqrt{2x^3 - 4x} \Rightarrow y' = \dfrac{6x^2 - 4}{2\sqrt{2x^3 - 4x}}$

② $y = x\sqrt{2x + 3} \Rightarrow y = \sqrt{x^2(2x + 3)}$

لسهولة الاشتقاق نربع x وندخلها داخل الجذر ثم توزيعها على القوس ثم الاشتقاق.

$y = \sqrt{2x^3 + 3x^2} \Rightarrow y' = \dfrac{6x^2 + 6x}{2\sqrt{2x^3 + 3x^2}}$

---

* ملاحظة حول اشتقاق الدوال الكسرية

A// $y = \dfrac{\text{عدد}}{\text{متغير}}$ نقوم برفع المقام إلى البسط مع مراعاة تغير إشارة الاس ثم الاشتقاق

Ex

① $y = \dfrac{3}{x^4}$

$y = 3x^{-4} \Rightarrow y' = -12x^{-5}$

② $y = \dfrac{3}{(x^2 - 4)^1}$

$y = 3(x^2 - 4)^{-1}$

سابعاً

$y' = -3(x^2 - 4)^{-2} \cdot (2x)$

B// $y = \dfrac{\text{متغير}}{\text{عدد}}$ نقوم بالاشتقاق للبسط فقط

Ex

① $y = \dfrac{x^3}{5}$

$y' = \dfrac{3x^2}{5} \Rightarrow y' = \frac{3}{5}x^2$

② $y = \dfrac{(4x - 3)}{2}$ نشتق البسط فقط

$y' = \dfrac{4}{2} = 2$

* العلاقة الضمنية ومشتقتها

متى تكون المشتقة ضمنية

اذا تحقق واحد أو اكثر مما يأتي .

① عندما يكون x , y في جهة واحدة
② عندما يكون أس غير الواحد .
③ عندما تكون زاوية لإحدى الدوال الدائرية مثلاً $\sin y$.

ملاحظة

في الاشتقاق الضمني لكل حالة اشتقاق الى y نقوم بالضرب في $\acute{y}$ او $\frac{dy}{dx}$

Ex// ① $y^3 \xrightarrow{\text{اشتقاق}} 3y^2\acute{y}$

② $3y^2 \xrightarrow{\quad} 6y\acute{y}$

③ $y \xrightarrow{\quad} 1\acute{y}$

س/ اذا كان $x^2 - y^2 = 7y - x$ جد $\frac{dy}{dx}$

$x^2 - y^2 = 7y - x$ ضمنية

$2x - 2y\acute{y} = 7\acute{y} - 1$ نجمع الحدود التي تحتوي على $\acute{y}$ في جهة والحدود الاخرى في جهة أخرى

$2x + 1 = 7\acute{y} + 2y\acute{y}$

$7\acute{y} + 2y\acute{y} = 2x + 1$ عامل مشترك $\acute{y}$

$\acute{y}(7 + 2y) = 2x + 1 \Rightarrow \acute{y} = \frac{2x + 1}{7 + 2y}$ نقسم على معامل $\acute{y}$

س/ (عاشر) اذا كان $x^3y^2 - 2y = 5x + 3$ جد $\frac{dy}{dx}$

$x^3y^2 - 2y = 5x + 3$ ضمنية

ضرب دالتين

$[x^3 2y\acute{y} + y^2 3x^2] - 2\acute{y} = 5$

$2x^3\acute{y} - 2\acute{y} = 5 - 3x^2y^2$

$\acute{y}(2x^3 - 2) = 5 - 3x^2y^2$

$\acute{y} = \frac{5 - 3x^2y^2}{2x^3 - 2}$

س/ اذا كان $2xy-4y+5=0$ جد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

الحل/ $2xy-4y+5=0$

ضرب دالتين

$[2xy' + y2] - 4y' = 0] \div 2$

اذا كانت المعادلة تقبل القسمة على عدد نقسم عليه

$xy' + y - 2y' = 0 \Rightarrow xy' - 2y' = -y \Rightarrow y'(x-2) = -y$

$\therefore y' = \frac{-y}{x-2}$

ضرب دالتين

$[xy'' + y'(1)] + y' - 2y'' = 0$

$xy'' + 2y' - 2y'' = 0$

$xy'' - 2y'' = -2y'$

$y''(x-2) = -2y'$

$y'' = \frac{-2y'}{x-2}$

نقوم بتعويض قيمة y' لكي تكون y'' خالية من y'

$y'' = \frac{-2\left(\frac{-y}{x-2}\right)}{x-2} = \frac{\frac{2y}{x-2}}{x-2} = \frac{2y}{(x-2)^2}$

س/ اذا علمت أن $y^2+x^2=1$ فبرهن على أن $y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$

الحل/ $y^2+x^2=1$

نشتق الداله لأعلى اشتقاق في المعادلة لتفاضلية وأعلى اشتقاق هو المشتقة الثالثة

$2yy' + 2x = 0] \div 2$

$yy' + x = 0$

$[yy'' + y'y'] + 1 = 0$

$[yy''' + y''y'] + [y'y'' + y'y''] = 0$

جمع الحدود المتشابهه

$yy''' + 3y''y' = 0$

$\therefore y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$

* اشتقاق الدوال الدائريه

مشتقة الزاويه

① $y = \sin\theta \xrightarrow{\text{اشتقاق}} \bar{y} = \cos\theta \cdot \bar{\theta}$ ⟵ مشتقة الزاويه

② $y = \cos\theta \longrightarrow \bar{y} = -\sin\theta \cdot \bar{\theta}$

③ $y = \tan\theta \longrightarrow \bar{y} = \sec^2\theta \cdot \bar{\theta}$

④ $y = \cot\theta \longrightarrow \bar{y} = -\csc^2\theta \cdot \bar{\theta}$

⑤ $y = \sec\theta \longrightarrow \bar{y} = \sec\theta \tan\theta \cdot \bar{\theta}$

⑥ $y = \csc\theta \longrightarrow \bar{y} = -\csc\theta \cot\theta \cdot \bar{\theta}$

س جد $\bar{y}$ لكل من الدوال الآتيه

① $y = \cos(3 + x^2)$

$\bar{y} = -\sin(3 + x^2) \cdot (2x)$ مشتقة الزاويه

$\bar{y} = -2x \sin(3 + x^2)$

② $y = 6 \tan 2x$

$\bar{y} = 6 \sec^2 2x \cdot 2 \Rightarrow \bar{y} = 12 \sec^2 2x$

③ $y = x \sin 5x$ ضرب دالتين

$\bar{y} = x \cos 5x \cdot 5 + \sin 5x \cdot (1)$

$\bar{y} = 5x \cos 5x + \sin 5x$

④ (علامه) $y = \sin 4x \tan 2x$ ضرب دالتين

$\bar{y} = \sin 4x \sec^2 2x \cdot 2 + \tan 2x \cos 4x \cdot 4$

$\bar{y} = 2 \sin 4x \sec^2 2x + 4 \tan 2x \cos 4x$

⑤ (علامه) $y = \tan(\cos x)$

تعتبر cosx زاويه الى tan وليس حاصل ضرب دالتين.

$\bar{y} = \sec^2(\cos x) \cdot (-\sin x \cdot (1))$ مشتقة الزاويه

$\bar{y} = -\sin x \sec^2(\cos x)$.

⑥ $y = \sec^3 2x$

* عند اشتقاق داله دائريه مرفوعه الى أس غير الواحد نقوم برفع الاس فوق قوس ثم نشتق بالقاعدة السابعه

$y = (\sec 2x)^3$ سابعه

$y' = 3(\sec 2x)^2 \cdot \sec 2x \tan 2x \cdot 2$

$y' = 6 \tan 2x \sec^3 2x$

س/ اذا كانت $y = \cos 2x$ جد $\frac{d^4y}{dx^4}$

$y = \cos 2x$

$y' = -\sin 2x \cdot 2 \Rightarrow y' = -2\sin 2x$

$y'' = -2\cos 2x \cdot 2 \Rightarrow y'' = -4\cos 2x$

$y''' = -4(-\sin 2x \cdot 2) \Rightarrow y''' = 8\sin 2x$

$y^{(4)} = 8\cos 2x \cdot 2 \Rightarrow y^{(4)} = 16\cos 2x$

س/ اذا كانت $y = x\sin x$ فبرهن ان $y^{(4)} - y + 4\cos x = 0$

$y = x\sin x$

$y' = x\cos x \cdot (1) + \sin x \cdot (1)$

$y'' = [x(-\sin x) + \cos x \cdot (1)] + \cos x \cdot (1)$

نرفع قوس اذا كانت المشتقه تحتوي على اشارة سالبه

$y'' = -x\sin x + 2\cos x$

$y''' = [-x\cos x + \sin x \cdot (-1)] + 2(-\sin x)$

$y''' = -x\cos x - \sin x - 2\sin x$

$y''' = -x\cos x - 3\sin x$

$y^{(4)} = [-x(-\sin x) + \cos x(-1)] - 3\cos x$

$y^{(4)} = x\sin x - \cos x - 3\cos x$

$y^{(4)} = x\sin x - 4\cos x$

نعوض قيم y ، $y^{(4)}$ في الطرف الايسر

الطرف الايسر $y^{(4)} - y + 4\cos x$

$x\sin x - 4\cos x - x\sin x + 4\cos x = 0$ الطرف الايمن

8

س/ اذا كانت $y=\tan x$ فبرهن أن $\frac{d^2y}{dx^2}=2y(1+y^2)$

$y=\tan x$

$\acute{y}=\sec^2 x\,(1) \Rightarrow \acute{y}=(\sec x)^2$

$\ddot{y}=2(\sec x)\sec x\tan x\,.(1) \Rightarrow \ddot{y}=2\tan x\sec^2 x$ (سابقه)

نعوض قيم y ، $\ddot{y}$ في الطرف الايسر والايمن $\frac{d^2y}{dx^2}=2y(1+y^2)$

ملاحظة: $\sec^2 x=1+\tan^2 x$

$2\tan x\sec^2 x=2\tan x(1+\tan^2 x)$

$2\tan x\sec^2 x=2\tan x\sec^2 x$

الطرف الايمن = الطرف الايسر

س/ اذا كانت $f(x)=\sin\pi x$ جد $\ddddot{f}(1)$

$f(x)=\sin\pi x \Rightarrow \acute{f}(x)=\cos\pi x\cdot\pi$

$\acute{f}(x)=\pi\cos\pi x \Rightarrow \ddot{f}(x)=\pi(-\sin\pi x\cdot\pi)$

$\ddot{f}(x)=-\pi^2\sin\pi x \Rightarrow \dddot{f}(x)=-\pi^2\cos\pi x\cdot\pi$

$\dddot{f}(x)=-\pi^3\cos\pi x$

$\therefore\ \dddot{f}(1)=-\pi^3\cos\pi(1) \Rightarrow \dddot{f}(1)=-\pi^3(-1)=\pi^3$

واجب

س/ اذا كانت $y=x\sin x$ فبرهن أن $\frac{d^2y}{dx^2}+y=2\cos x$

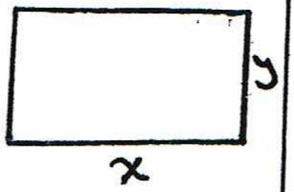
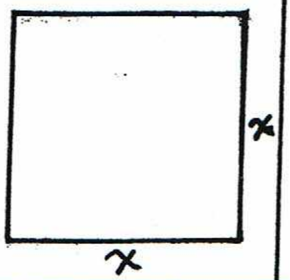
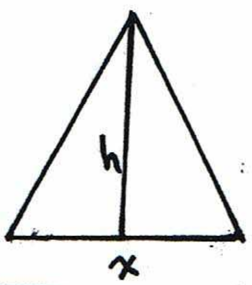
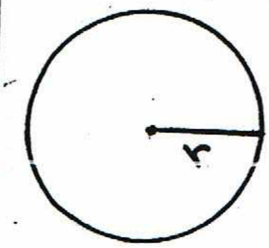
س2/ اذا كانت $y=x\cos 3x$ اثبت أن $x\ddot{y}+9x\acute{y}+18y=0$

س3/ اذا علمت أن $y=\cos x-3\sin x$ برهن أن $y+\acute{y}+\ddot{y}+\dddot{y}=0$

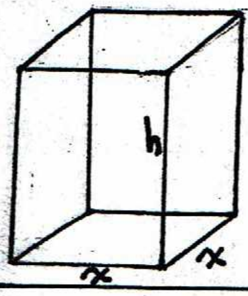
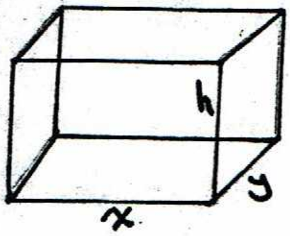
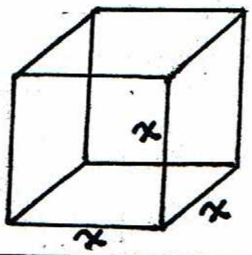
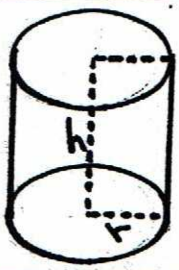
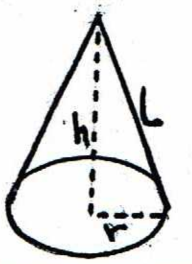
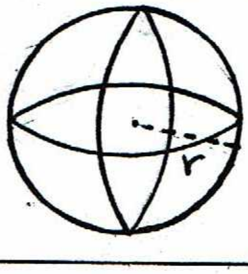
س4/ اذا كانت $x=y\sec x$ اثبت أن $\ddot{y}+y+2\sin x=0$

س5/ اذا علمت أن $\tan(x^2y^2)=3$ اثبت أن $\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x}$

* الاشكال الهندسية المستوية.

الشكل	المساحة A	المحيط P	الرسم
① المستطيل	$A = x \cdot y$ العرض × الطول	$P = 2x + 2y$ مجموع أطوال الأضلاع الاربعة	
② المربع	$A = x^2$ طول الضلع في نفسه	$P = 4x$ مجموع أطوال الأضلاع الاربعة	
③ المثلث	$A = \frac{1}{2} x h$ $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع	P = مجموع أطوال الأضلاع الثلاث	
④ الدائرة	$A = r^2 \pi$	$P = 2r\pi$ مشتقة المساحة	

* الاشكال الهندسية المجسمة.

الشكل	المساحة A A= الارتفاع × محيط القاعدة + مساحة قاعدتين	الحجم V V= الارتفاع × مساحة القاعدة	الرسم
① متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة	$A=4xh+2x^2$	$V=x^2.h$	
② متوازي سطوح مستطيلة	$A=(2x+2y)h+2xy$	$V=x.y.h$	
③ المكعب	$A=6x^2$	$V=x^3$ $(\text{طول الضلع})^3$	
④ الاسطوانة	$A=2r\pi h+2r^2\pi$	$V=r^2\pi h$	
⑤ المخروط	$A=rL\pi+r^2\pi$ حيث L الارتفاع الجانبي	$V=\frac{1}{3}r^2\pi h$	
⑥ الكُرة	$A=4r^2\pi$ مشتقة الحجم	$V=\frac{4}{3}r^3\pi$	

* المعدلات المرتبطة بالزمن.

لحل مسائل العلاقات المرتبطة بالزمن نتبع ما يلي.

① نرسم شكلاً توضيحياً أن امكن في حالة كون السؤال يتضمن شكلاً هندسياً
② نجد علاقة حسب السؤال من حجم او مساحة او محيط او مسافة بين نقطتين او مبرهنة فيثاغورس او ..
③ نجد علاقة آخرى ضمنية لكي نقلل عدد المتغيرات أن امكن اي نعوض علاقة بأخرى
④ بعد الرسم وكتابة العلاقة من حجم أو مساحة أو ... نقوم بتحديد الثوابت من المتغيرات
⑤ نقوم بتعويض قيمة الثابت في بداية الحل اي قبل الاشتقاق
⑥ المتغير لا يعوض بقيمة إلا بعد الاشتقاق
⑦ نشتق الطرفين بالنسبة للزمن (t) ونعوض قيمة المتغير ونكمل الحل.

---

* ملاحظات

① الاشتقاق يكون بالنسبة للزمن

نقوم بالاشتقاق بصورة اعتيادية ونضع بجنبها المعدل الزمني وفق المتغير

Ex

① $3x^2 \xrightarrow{\text{اشتقاق}} 6x\frac{dx}{dt}$

② $-y^2 \longrightarrow -2y\frac{dy}{dt}$

③ $4h \longrightarrow 4\frac{dh}{dt}$

④ $V \longrightarrow 1\frac{dv}{dt}$

② أن اي متغير يتسرب أو ينكمش أو يتقلص أو ينصهر او ينخفض او يقترب أو يذوب (اي أن المتغير يصغر بمرور الزمن) نضع امام معدله اشارة سالبة

③ أن اي متغير يزداد أو يسحب او يتمدد أو يرتفع أو يبتعد (اي أن المتغير يكبر بمرور الزمن) نضع أمام معدله الاشارة موجبة

مهم

④ في حالة وجود سائل داخل شكل هندسي سيكون السؤال حول السائل وشكله

⑤ لايجاد الاطوال أو انصاف الاقطار نجدها من العلاقة الاساسية في السؤال.

* السائل داخل الاشكال الهندسية يتسرب أو ينصب.

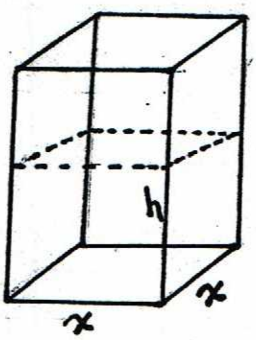
① السائل داخل متوازي المستطيلات قاعدته مربعة أو مستطيلة يكون ارتفاعه متغير وحجمه متغير وطول قاعدته ثابت وعرضها ثابت.

② السائل داخل الاسطوانة يكون ارتفاعه متغير وحجمه متغير ونصف القطر ثابت

③ السائل داخل المخروط يكون ارتفاعه متغير وحجمه متغير ونصف مقطعه متغير

④ السائل داخل المكعب يكون ارتفاعه متغير وحجمه متغير وطول قاعدته ثابت وعرضها ثابت • لذلك أن حجم السائل داخل المكعب يكون $V = x^2 \cdot h$.

س/ خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة طول ضلعها 2m يتسرب منه الماء بمعدل $0.4 m^3/h$ جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان عند أي زمن



نفرض حجم الماء في الخزان = V (متغير)

ارتفاعه = h (متغير)

طول قاعدته = x (ثابت)

معلومات

$x = 2m$

$\frac{dV}{dt} = -0.4 m^3/h$

$\frac{dh}{dt} = ?$

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = x^2 \cdot h$

* ملاحظة: بعد كتابة القانون نحدد الثوابت من المتغيرات حيث نقوم بتعويض قيم الثوابت قبل الاشتقاق

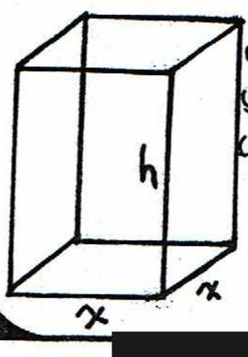
$V = (2)^2 \cdot h \Rightarrow V = 4h$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن ونعوض القيم لكي نجد المطلوب

$\frac{dV}{dt} = 4 \frac{dh}{dt}$

$\frac{-4}{10} = \frac{4}{1} \frac{dh}{dt} \Longrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-1}{10} = -0.1 m/h$

س/ متوازي سطوح مستطيلة ابعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل $0.3 cm/s$ وارتفاعه يتناقص بمعدل $0.5 cm/s$ جد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة 4 cm والارتفاع 3 cm



نفرض

الحجم V= (متغير)

الارتفاع h= (متغير)

طول قاعدته = x (متغير)

معلومات

$\frac{dx}{dt} = 0.3 cm/s$

$\frac{dh}{dt} = -0.5 cm/s$

$\frac{dV}{dt} = ?$

$x = 4cm$

$h = 3cm$

الاشتقاق حاصل ضرب دالتين $V = x^2 \cdot h$

$\frac{dV}{dt} = x^2 \frac{dh}{dt} + h\, 2x \frac{dx}{dt}$

$\frac{dV}{dt} = (16)(\frac{-5}{10}) + (3)(2)(4)(\frac{3}{10})$

$\frac{dV}{dt} = -8 + \frac{36}{5} = \frac{-40+36}{5} = \frac{-4}{5} = -0.8 cm^3/s$

س4 متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاث امثال طول ضلع قاعدته يتمدد بالحرارة جد معدل التغير في حجمه ومساحته السطحية عندما طول ضلع قاعدته 8 cm ومعدل تغير في طول ضلع قاعدته $\frac{1}{4}$ cm/s .

معلومات

$h = 3x$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}$ cm/s

$\frac{dv}{dt} = ?$

$\frac{dA}{dt} = ?$

$x = 8$ cm

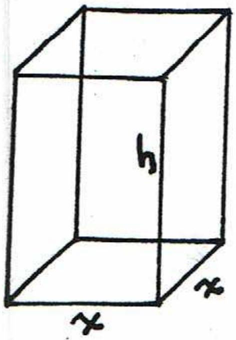
نفرض

$V =$ الحجم

$A =$ المساحة

$h =$ الارتفاع

$x =$ طول قاعدته



∵ الشكل يتمدد بالحرارة

∴ جميع ابعاد الشكل والحجم والمساحة متغيرات

الحجم = مساحة القاعدة x الارتفاع

$V = x^2 . h$

$\because h = 3x$ نعوض قيمة h لكي نقلل عدد المتغيرات

$\therefore V = x^2 . 3x \Rightarrow V = 3x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 9x^2 . \frac{dx}{dt}$

$\frac{dv}{dt} = 9(8)^2(\frac{1}{4}) = 9(\overset{16}{\cancel{64}})(\frac{1}{\cancel{4}}) = 144$ cm³/s

---

المساحة = محيط القاعدة x الارتفاع + مساحة قاعدتين

$A = 4x\,h + 2x^2$

$\because h = 3x$

$\therefore A = 4x(3x) + 2x^2 \Rightarrow A = 12x^2 + 2x^2 \Rightarrow A = 14x^2$

$\frac{dA}{dt} = 28x\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 28(\overset{2}{\cancel{8}})\frac{1}{\cancel{4}} = 56$ cm²/s

س5 صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها تساوي 96cm² يتمدد طولها بمعدل 2cm/s بحيث تبقى مساحتها ثابتة ، جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها 8cm .

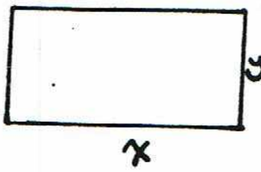
معلومات

$A = 96$ cm²

$\frac{dx}{dt} = 2$ cm/s

$\frac{dy}{dt} = ?$

$y = 8$cm



نفرض مساحة الصفيحة = A ثابت

الطول = x متغير

العرض = y متغير

لايجاد الاطوال نجدها من العلاقة الاساسية في السؤال

$A = xy$

$96 = x8$

$\therefore x = \frac{96}{8} = 12$

$A = xy$

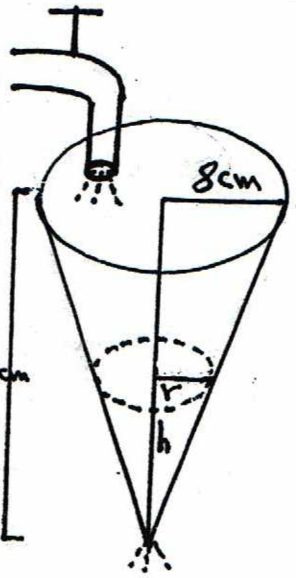
$xy = 96$

$x . \frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0$

$(12)(\frac{dy}{dt}) + (8)(2) = 0$

$(12)\frac{dy}{dt} = -16 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-16}{12} = \frac{-4}{3}$ cm/s

س٦ مرشح مخروطي قاعدته أفقية ورأسه للأسفل ، ارتفاعه يساوي 24 cm وطول قطر قاعدته 16cm يصب فيه سائل بمعدل $5\,cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل بمعدل $1\,cm^3/s$ جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون فيها عمق السائل 12cm .



نفرض حجم السائل = V (متغير)

الارتفاع = h (متغير)

نصف القطر = r (متغير)

<u>معلومات</u>

$h = 24\,cm$ للمخروط (ثابت)

$2r = 16\,cm$

$r = 8\,cm$ للمخروط (ثابت)

$$\frac{dV_1}{dt} = 5\,cm^3/s \qquad \frac{dV_2}{dt} = -1\,cm^3/s \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = 5 + (-1) = 4$$

$\frac{dh}{dt}$ للسائل $= ?$

$h = 12$ للسائل (متغير)

من استعمال $\tan\theta$ او تشابه مثلثين

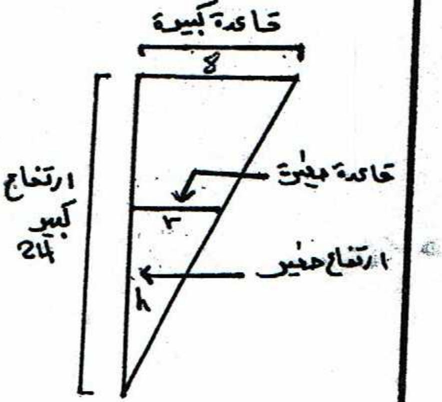
متغيرات لا نعوض قيمها [$\frac{\text{ارتفاع صغير}}{\text{قاعدة صغيرة}} = \frac{\text{ارتفاع كبير}}{\text{قاعدة كبيرة}}$] ثوابت نعوض قيمها

$$\frac{24}{8} = \frac{h}{r}$$

$$3r = h$$

$$r = \frac{h}{3}$$

نعوض عن r في العلاقة



$$V_{\text{للسائل}} = \frac{1}{3} r^2 \pi h$$

$$V = \frac{\pi}{3} h \left(\frac{h}{3}\right)^2$$

$$V = \frac{\pi}{3} h \frac{h^2}{9}$$

$$V = \frac{\pi}{27} h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{27}(3h^2)\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{9} h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$4 = \frac{\pi}{9}(12)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$4 = \frac{\pi}{9} 144 \frac{dh}{dt}$$

$$16\pi \frac{dh}{dt} = 4$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{16\pi} = \frac{1}{4\pi}\ cm/s$$

س/ لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $y^2=4x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة $(7,0)$ يساوي $0.2\ unit/s$، جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني للنقطة M عندما يكون $x=4$.

معلومات

$y^2=4x$

نقطة $(7,0)$

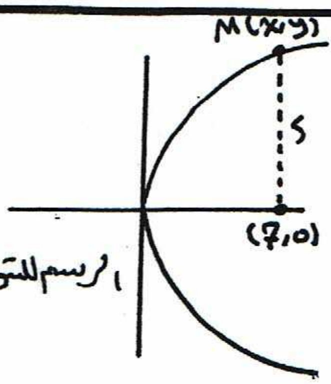
$\frac{ds}{dt}=0.2\ unit/s$

$\frac{dx}{dt}=?$

$x=4$

لتكن النقطة $M(x,y)$

والبعد بينها وبين $(7,0)$ هو s



الرسم للتوضيح

$$s=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

قانون المسافة او البعد بين نقطتين.

$$s=\sqrt{(x-7)^2+(y-0)^2}$$

$$s=\sqrt{x^2-14x+49+y^2}$$

نعوض $y^2=4x$ في s لكي نقلل عدد المتغيرات

$$s=\sqrt{x^2-14x+49+4x}$$

$$s=\sqrt{x^2-10x+49}$$

نشتق الطرفين

$$\frac{ds}{dt}=\frac{2x-10}{2\sqrt{x^2-10x+49}}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{2}{10}=\frac{8-10}{2\sqrt{16-40+49}}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{5}=\frac{-2}{2\sqrt{25}}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{5}=\frac{-1}{5}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt}=-1\ unit/s$$

س٢ لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y=x^2$ جد أحداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $(0, \frac{3}{2})$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الإحداثي الصادي للنقطة M

معلومات

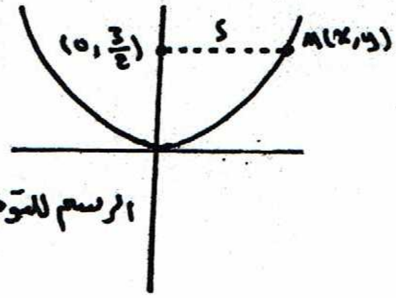
$x^2 = y$

$M(x,y) = ?$

$(0, \frac{3}{2})$

$\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{dy}{dt}$

لتكن النقطة $M(x,y)$ والبعد بينها وبين $(0, \frac{3}{2})$ هو s



الرسم للتوضيح

$$s = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$ قانون المسافة او البعد بين نقطتين

$$s = \sqrt{(x-0)^2+(y-\frac{3}{2})^2}$$

$$s = \sqrt{x^2 - y^2 - 3y + \frac{9}{4}}$$ نعوض $y = x^2$ في s لكي نتقلل عدد المتغيرات

$$s = \sqrt{y - y^2 - 3y + \frac{9}{4}}$$

$$s = \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$$ نشتق الطرفين

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{2(y-1)}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{(y-1)}{\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}$$ وسطين × طرفين

$$(3y-3)^2 = \left(2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}\right)^2$$ بتربيع الطرفين

$$9y^2 - 18y + 9 = 4(y^2 - 2y + \frac{9}{4})$$

$$9y^2 - 18y + 9 = 4y^2 - 8y + 9$$

$$9y^2 - 18y - 4y^2 + 8y = 0$$

$$5y^2 - 10y^2 = 0 \;] \div 5$$

$$y^2 - 2y = 0$$

$$y(y-2) = 0$$

اما $y = 0 \Rightarrow x^2 = y \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\therefore (0, 0)$ النقطة لا تحقق تهمل

أو $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x^2 = 2$

$\therefore x = \pm\sqrt{2}$

$(\sqrt{2}, 2)$ ، $(-\sqrt{2}, 2)$

س/ جد النقط التي تنتمي للدائرة: $x^2+y^2+4x-8y=108$ والتي عندها يكون المعدل الزمني لتغير x يساوي المعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن t

معلومات

$(x,y)=?$

$\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$

$x^2+y^2+4x-8y=108$ ---① نشتق الطرفين

$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}+4\frac{dx}{dt}-8\frac{dy}{dt}=0$

$\because \frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$

$\therefore 2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dx}{dt}+4\frac{dx}{dt}-8\frac{dx}{dt}=0$

$\frac{dx}{dt}(2x+2y+4-8)=0$

اما $\frac{dx}{dt}=0$ لا يحقق

او $2x+2y+4-8=0$

$2x+2y-4=0]\div 2$

$x+y-2=0$

$\therefore y=2-x$ ---② نعوض ② في ①

$x^2+(2-x)^2+4x-8(2-x)=108$

$x^2+4-4x+x^2+4x-16+8x-108=0$

$2x^2+8x-120=0]\div 2$

$x^2+4x-60=0$

$(x+10)(x-6)=0$

اما $x+10=0 \Rightarrow x=-10$ نعوض في ② $\therefore y=2+10=12$, $(-10,12)$ النقط

او $x-6=0 \Rightarrow x=6$ نعوض في ② $\therefore y=2-6=-4$, $(6,-4)$

* ملاحظة : في حالة وجود كرة أو مكعب او اي شكل محاط بطبقة من الجليد أو اي مادة قابلة للذوبان فأن الحجم يكون [الحجم غير المغطى – الحجم المغطى = الحجم]

مع ملاحظة بذلك طول ضلع المكعب او نصف قطر الكرة عندما يكون مغطى او غير مغطى

① في المكعب يكون طول الضلع عندما يكون مغطى هو $x + 2$(سمك)

② في الكرة يكون طول نصف قطر الكرة عندما يكون مغطى هو سمك + r

س/ مكعب صلد طول حرفه ($8\ cm$) مغطى بطبقة من الجليد بحيث شكله يبقى مكعباً فاذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل ($6\ cm^3/s$) جد معدل النقصان بسمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها هو السمك ($1cm$)

نفرض حجم المكعب V (متغير)
طول حرفه x (ثابت)
سمك الجليد y (متغير)

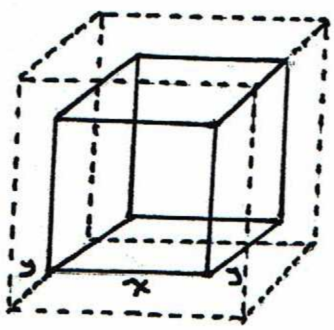
معلومات

$x = 8\ cm$

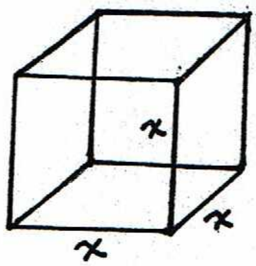
$\frac{dV}{dt} = -6\ cm^3/s$

$\frac{dy}{dt} = ?$

$y = 1\ cm$



مكعب مغطى
طول ضلعه $x+2y$



مكعب غير مغطى
طول ضلعه x

حجم المكعب = (طول الضلع)^3

$$V = (x+2y)^3$$

$$V = x^3$$

∴ حجم غير مغطى — حجم مغطى = الحجم

$$V = (x+2y)^3 - x^3$$ نعوض الثوابت قبل الاشتقاق

$$V = (8+2y)^3 - 8^3$$ نشتق الطرفين

سابعد

$$\frac{dV}{dt} = 3(8+2y)^2 \cdot 2\frac{dy}{dt} - 0$$

نعوض القيم

$$-6 = 3(8+2)^2\, 2\frac{dy}{dt}$$

$$-6 = 600\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-6}{600} = \frac{-1}{100} = -0.01\ cm/s$$

س ٣ كرة حديدية نصف قطرها (4 cm) مغطاة بطبقة منتظمة من الجليد فاذا كان الجليد يذوب بمعدل $10\ cm^3/s$ اوجد سرعة (معدل) تغير نقصان سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد (2 cm).

<u>معلومات</u>

$r = 4\ cm$

$\frac{dv}{dt} = -10\ cm^3/s$

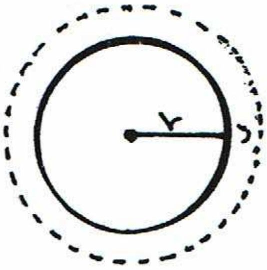
$\frac{dy}{dt} = ?$

$y = 2\ cm$

نفرض حجم الكرة = V (متغير)

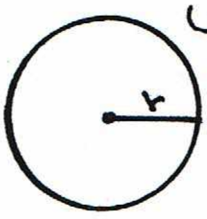
نصف القطر = r (ثابت)

سمك الجليد = y (متغير)



كرة مغطاة

طول نصف القطر = r + y



كرة غير مغطاة

طول نصف القطر = r

حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi$ (نصف القطر)^3 | حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi$ (نصف القطر)^3

$V = \frac{4}{3}\pi(r+y)^3$ | $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

الحجم = حجم مغطى − حجم غير مغطى

نعوض الثوابت قبل الاشتقاق $V = \frac{4}{3}\pi(r+y)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$

نشتق الطرفين $V = \frac{4}{3}\pi(\underbrace{4+y}_{\text{تابعة}})^3 - \frac{4}{3}\pi(4)^3$

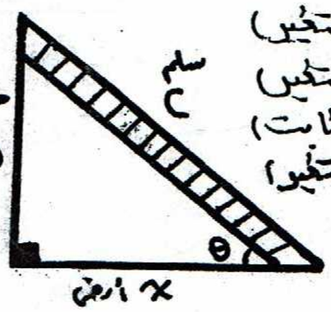
$V = 4\pi(4+y)^2 \cdot 1\frac{dy}{dt} - 0$

اكمل حل السؤال

ج. $\left[\frac{dy}{dt} = \frac{-5}{72\pi}\ cm/s\right]$

س/ سلم طوله 10 m يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه العلوي على حائط رأسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل 2 m/s عندما يكون الطرف الاسفل على بعد 8 m عن الحائط جد:

① معدل انزلاق الطرف العلوي ② سرعة تغير الزاوية بين السلم والارض .



نفرض بعد الطرف الاسفل للسلم عن الحائط x (متغير)

وبعد الطرف الاعلى للسلم عن الارض y (متغير)

وطول السلم C (ثابت)

قياس الزاوية بين السلم والارض θ (متغير)

⟹

معلومات

$C = 10\,m$

$\frac{dx}{dt} = 2\,m/s$

$x = 8\,m$

① $\frac{dy}{dt} = ?$

② $\frac{d\theta}{dt} = ?$

من العلاقة الرئيسية نجد طول y

$$x^2 + y^2 = C^2$$

$$(8)^2 + y^2 = (10)^2$$

$$64 + y^2 = 100$$

$$y^2 = 36 \Rightarrow y = 6\,m$$

فيثاغورس $(x)^2 + (y)^2 = (C)^2$

نشتق الطرفين $x^2 + y^2 = (10)^2$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \;]\div 2$$

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$(8)(2) + (6)\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$$

$$6\frac{dy}{dt} = -16 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-16}{6} = \frac{-8}{3}\,m/s$$

$$\sin\theta = \frac{\text{مقابل } y}{\text{وتر } C} \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{10}$$

نشتق الطرفين $10\sin\theta = y$

$$10\cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$$\cancel{10}\,\frac{8}{\cancel{10}} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{-\cancel{8}}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{مجاور } x}{\text{وتر } C} = \frac{8}{10}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{3}\,rad/s$$

---

* ملاحظة : من الممكن أن يحل الفرع الثاني من السؤال باستخدام cos أو tan واجب الطالب

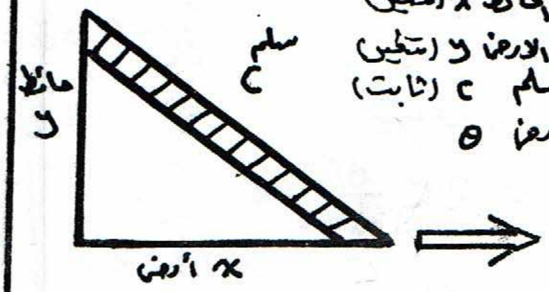
س/ سلم يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسي فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل $2\ m/s$ فجد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض تساوي $\frac{\pi}{3}$.

نفرض بعد الطرف الأسفل للسلم عن الحائط x (متغير)

وبعد الطرف الأعلى للسلم عن الأرض y (متغير)

وطول السلم c (ثابت)

قياس الزاوية بين السلم والأرض θ



معلومات

$\frac{dx}{dt}=2\ m/s$

$\frac{dy}{dt}=?$

$\theta=\frac{\pi}{3}$

$\tan\theta=\frac{y\ \text{مقابل}}{x\ \text{مجاور}}$

$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{y}{x}$

$\sqrt{3}=\frac{y}{x}$

$\therefore\ y=\sqrt{3}x$

$x^2+y^2=c^2$ فيثاغورس

نشتق الطرفين

$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0\ ]\div 2$

$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0$

$2x+\sqrt{3}x\frac{dy}{dt}=0$

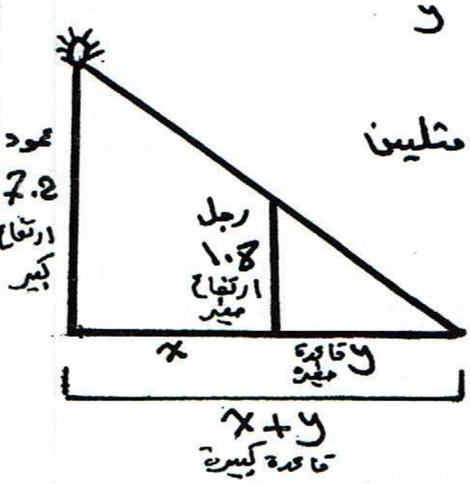
$\sqrt{3}x\frac{dy}{dt}=-2x$

$\frac{dy}{dt}=\frac{-2x}{\sqrt{3}x}=\frac{-2}{\sqrt{3}}\ m/s$

س/ عمود طوله $(7.2m)$ في نهايته مصباح يتحرك رجل طوله $(1.8m)$ مبتعداً عن العمود وبسرعة $30\ m/min$ جد معدل تغير طول ظل الرجل .

نفرض بعد الرجل عن العمود x

نفرض طول ظل الرجل y



معلومات

طول العمود 7.2

طول الرجل 1.8

$\frac{dx}{dt}=30\ m/min$

$\frac{dy}{dt}=?$

من استعمال $\tan\theta$ او تشابه مثلثين

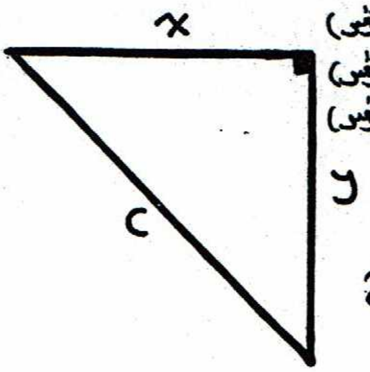
$\frac{\text{ارتفاع كبير}}{\text{قاعدة كبيرة}}=\frac{\text{ارتفاع صغير}}{\text{قاعدة صغيرة}}$

$\frac{\overset{4}{\cancel{7.2}}}{x+y}=\frac{\overset{1}{\cancel{1.8}}}{y}$

$\frac{4}{x+y}=\frac{1}{y}\Rightarrow 4y=x+y$

$4y-y=x\Rightarrow 3y=x\Rightarrow 3\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}\Rightarrow 3\frac{dy}{dt}=30\Rightarrow\frac{dy}{dt}=10\ m/min$

س ٤ / من محطة ما للقطارات انطلق قطار باتجاه الجنوب بسرعة 80 km/h وفي نفس الوقت انطلق قطار آخر باتجاه الغرب بسرعة 60 km/h أوجد معدل الابتعاد بين القطارين بعد مضي ساعتين من انطلاقهما.



نفرض بعد القطار عن المحطة باتجاه الجنوب y (متغير)
نفرض بعد القطار عن المحطة باتجاه الغرب x (متغير)
نفرض البعد بين القطارين c (متغير)

معلومات

$\frac{dy}{dt} = 80 km/h$

$\frac{dx}{dt} = 60 km/h$

$\frac{dc}{dt} = ?$

$t = 2h$ زمن

فيثاغورس $x^2 + y^2 = c^2$

$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2c\frac{dc}{dt} \,]\div 2$

$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = c\frac{dc}{dt}$

الزمن × السرعة = المسافة

① $y = 80 \times 2 = 160 km$

② $x = 60 \times 2 = 120 km$

نجد المسافة c من العلاقة الرئيسية

$x^2 + y^2 = c^2$

$(120)^2 + (160)^2 = c^2$

$14400 + 25600 = c^2$

$c^2 = 40000 \Rightarrow c = 200 km$

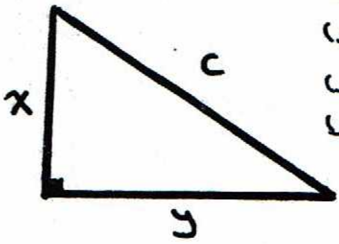
$(120)(60) + (160)(80) = (200)(\frac{dc}{dt})$

$7200 + 12800 = 200\frac{dc}{dt}$

$200\frac{dc}{dt} = 20000$

$\frac{dc}{dt} = 100 km/h$

س ٤ / أبحرت باخرة من ميناء باتجاه الشرق في الساعة السادسة صباحاً بسرعة 20 km/h وفي الساعة الثامنة صباحاً أبحرت باخرة ثانية باتجاه الشمال بسرعة 30 km/h أوجد السرعة التي تبعد الباخرتان عن بعضهما في تمام الساعة العاشرة صباحاً.



نفرض بعد الباخرة عن الميناء باتجاه الشرق y (متغير)
نفرض بعد الباخرة عن الميناء باتجاه الشمال x (متغير)
نفرض البعد بين الباخرتين c (متغير)

معلومات

$\frac{dy}{dt} = 20 km/h$

$\frac{dx}{dt} = 30 km/h$

$\frac{dc}{dt} = ?$

$t = 4h$ زمن الباخرة الأولى

$t = 2h$ زمن الباخرة الثانية

$x^2 + y^2 = c^2$

$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2c\frac{dc}{dt} \,]\div 2$

$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = c\frac{dc}{dt}$

زمن × السرعة = المسافة

$y = 20 \times 4 = 80 km$

$x = 30 \times 2 = 60 km$

$x^2 + y^2 = c^2$

$3600 + 6400 = c^2 \Rightarrow c = 100$

$(60)(30) + (80)(20) = (100)(\frac{dc}{dt})$

$1800 + 1600 = 100\frac{dc}{dt}$

$100\frac{dc}{dt} = 3400 \Rightarrow \frac{dc}{dt} = 34 km/s$

* ملاحظات حول العلاقة الرئيسية والمساعدة في المسائل المرتبطة بالزمن

① المسائل التي تحتوي على سلم أو طريقان متعامدان او اشارة ضوئية أو ميناء أو قطار أو طائرة ورقية العلاقة الرئيسية والمساعدة هي مبرهنة فيثاغورس.

② المسائل التي يكون فيها سائل غالباً ما تكون العلاقة هي حجم السائل للشكل واذا كان السائل داخل مخروط تكون العلاقة المساعدة هي تشابه مثلثين او tan

③ المسائل التي يكون فيها اعطاء نقطة ومعادلة منحني تكون العلاقة الرئيسية هي قانون المسافة $S=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ والعلاقة المساعدة هي معادلة المنحني.

④ المسائل التي يكون فيها ظل لجسم يتحرك نحو مصباح العلاقة الرئيسية هي تشابه مثلثين.

⑤ المسائل التي يكون فيها معدل زاوية العلاقة الرئيسية هي نسبة مثلثية.

⑥ المسائل التي تحتوي على شكل هندسي، مكعب او كرة أو مستطيل أو مخروط او.... تكون العلاقة الرئيسية هي حجم او مساحة.

واجب

س1/ تسير سيارة بسرعة $18\,m/s$ اجتازت اشارة ضوئية ارتفاعها $6\,m$ اوجد معدل ابتعاد السيارة عن الاشارة عندما يكون بعدها عن قاعدة الاشارة $8\,m$ $[14.4\,m/s]=ج$

س2/ بالون كروي يعبأ فيه الغاز بمعدل $200\,cm^3/s$ فاذا كان معدل ازدياد نصف قطرها $\frac{2}{11}\,cm/s$ جد طول نصف القطر في تلك اللحظة. $[r=5\,cm]=ج$

س3/ صب ماء في خزان على شكل اسطوانة دائرية قائمة نصف قطر قاعدتها $2\,m$ بمعدل $8\,m^3/s$ جد ارتفاع سطح الماء في الخزان. $[\frac{dh}{dt}=\frac{2}{\pi}\,cm/s]=ج$

س4/ اسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل ($0.5\,cm/s$) بحيث يظل حجمها دائماً مساوياً الى ($320\pi\,cm^3$) جد معدل تغير نصف قطر قاعدتها عندما يكون الارتفاع ($5\,cm$) $[\frac{dr}{dt}=-0.4]=ج$

س5/ مكعب من الثلج يتناقص طول ضلعه بمعدل ($0.001\,m/s$) احسب معدل التغير في حجمه ومساحته عندما يكون طول ضلعه ($10\,cm$) $[\frac{dv}{dt}=-0.3\,cm^3/s\,,\,\frac{dA}{dt}=-0.12\,cm^2/s]=ج$

س6/ صفيحة معدنية مستطيلة طولها ضعف عرضها فاذا كان العرض يتزايد بمعدل ($\frac{1}{4}\,cm/s$) جد معدل الزيادة في مساحتها عندما يكون عرضها ($10\,cm$) $[\frac{dA}{dt}=10\,cm^2/s]=ج$

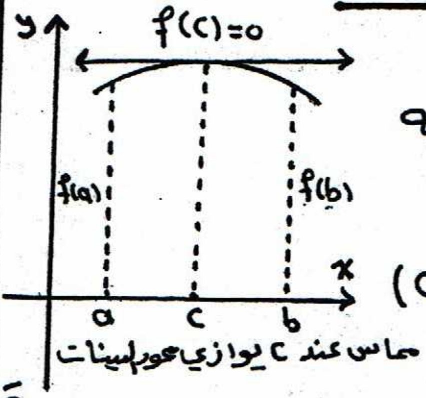
س7/ حوض للسباحة على شكل متوازي مستطيلات طوله ($20\,m$) وعرضه ($8\,m$) وعمقه ($2\,m$) ينصب منه الماء بمعدل ($30\,m^3/min$) وفي اسفله حنفية للتفريغ يتسرب منها الماء بمعدل ($25\,m^3/min$) فتحت الحنفيتان معاً جد سرعة ارتفاع الماء في الحوض. $[\frac{dh}{dt}=\frac{1}{32}\,m/min]=ج$

س8/ خزان على شكل مكعب مملوء في الماء طول ضلعه ($3\,m$) يتسرب منه الماء بمعدل ($36\,m^3/min$) جد معدل انخفاض الماء في الخزان $[\frac{dh}{dt}=4\,m/min]=ج$

س9/ جد النقطة على المنحني $y=2x^2-x+5$ والتي عندها يكون معدل ازدياد x يساوي ($2\,unit/s$) ومعدل نقصان y يساوي ($6\,unit/s$) $[(\frac{-1}{2},6)]=ج$

س10/ طريقان متعامدان يلتقيان في نقطة m تحركت سيارتان من نقطة m كل منهما في طريق وكان معدل سرعة السيارة الاولى ($80\,km/h$) ومعدل سرعة السيارة الثانية ($60\,km/h$) جد معدل الابتعاد بين السيارتين بعد ربع ساعة من بدء الحركة من m $[100\,km/h]=ج$

Rolle's Theorem مبرهنة رول



اذا تحقق في الداله f الشروط الثلاثه الاتيه

① مستمرة في الفترة المغلقه $[a , b]$

② قابله للاشتقاق في الفتره المفتوحه (a , b)

③ $f(a) = f(b)$

فأنه يوجد على الاقل قيمة واحدة c تنتمي الى (a , b) وتحقق $f'(c)=0$

---

* اذا كانت الداله ليست جذريه وليست كسريه تسمى داله كثيرة الحدود وتكون مستمرة وقابله للاشتقاق .

س/ بين هل أن مبرهنه رول تتحقق لكل من الدوال التاليه وجد قيمة c الممكنه

① $f(x)=x^2-3x \quad , x\in[-1,4]$

① الداله مستمرة على الفترة المغلقه $[-1,4]$ لانها كثيرة الحدود .

② الداله قابله للاشتقاق على الفترة المفتوحه $(-1,4)$ لانها كثيرة الحدود .

③
$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=(-1)^2-3(-1)=1+3=4 \\ f(4)=(4)^2-3(4)=16-12=4 \end{array}\right] \Rightarrow f(-1)=f(4)$$

∴ الداله تحقق شروط مبرهنه رول ضمن الفترة المعطاة

نقوم بإيجاد قيمة $c \longrightarrow f'(c)=0$

$f'(x)=2x-3$

$f'(c)=2c-3 \Rightarrow 2c-3=0 \Rightarrow 2c=3 \Rightarrow c=\frac{3}{2}\in(-1,4)$

---

② $f(x)=9x+3x^2-x^3 \quad , x\in[-1,1]$

① الداله مستمرة على الفترة المغلقه $[-1,1]$ لانها كثيرة الحدود .

② الداله قابله للاشتقاق على الفترة المفتوحه $(-1,1)$ لانها كثيرة الحدود

③
$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=9(-1)+3(-1)^2-(-1)^3=-9+3+1=-5 \\ f(1)=9(1)+3(1)^2-(1)^3=9+3-1=11 \end{array}\right] \Rightarrow f(-1)\neq f(1)$$

∴ الداله لا تحقق شروط مبرهنه رول لان الشرط الثالث لم يتحقق .

③ $f(x) = (2-x)^2 \quad , x \in [0,4]$

① الداله مستمرة على الفترة المغلقة [0,4] لانها كثيرة الحدود .

② الداله قابله للاشتقاق على الفترة المفتوحه (0,4) لانها كثيرة الحدود .

③
$$\left.\begin{array}{l} f(0) = (2-0)^2 = (2)^2 = 4 \\ f(4) = (2-4)^2 = (-2)^2 = 4 \end{array}\right] \Rightarrow f(0) = f(4)$$

∴ الداله تحقق شروط مبرهنة رول ضمن الفترة المعطاة

∴ نجد قيمة $c \longrightarrow f'(c) = 0$

$f'(x) = 2(2-x)^1(-1)$

$f'(c) = -2(2-c) \Rightarrow -2(2-c) = 0] \div (-2) \Rightarrow 2-c = 0 \Rightarrow c = 2 \in (0,4)$

④ $f(x) = (x-1)^4 \quad , x \in [-1,3]$

① الداله مستمرة على الفترة المغلقة [-1,3] لانها كثيرة الحدود

② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحه (-1,3) لانها كثيرة الحدود

③
$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = (-1-1)^4 = (-2)^4 = 16 \\ f(3) = (3-1)^4 = (2)^4 = 16 \end{array}\right] \Rightarrow f(-1) = f(3)$$

∴ الداله تحقق شروط مبرهنة رول ضمن الفترة المعطاة .

∴ نجد قيمة $c \longleftarrow f'(c) = 0$

$f'(x) = 4(x-1)^3(1)$

$f'(c) = 4(c-1)^3 \Rightarrow 4(c-1)^3 = 0] \div 4 \Rightarrow \underset{\text{بالجذر}}{(c-1)^3} = 0 \Rightarrow c-1 = 0 \Rightarrow c = 1 \in (-1,3)$

⑤ $f(x) = (x^2-3)^2 , \quad x \in [-1,1]$

① الداله مستمرة على الفترة المغلقة [-1,1] لانها كثيرة الحدود .

② الداله قابله للاشتقاق على الفترة المفتوحه (-1,1) لانها كثيرة الحدود .

③
$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = [(-1)^2-3]^2 = (1-3)^2 = (-2)^2 = 4 \\ f(1) = [(1)^2-3]^2 = (1-3)^2 = (-2)^2 = 4 \end{array}\right] \Rightarrow f(-1) = f(1)$$

∴ الداله تحقق شروط مبرهنة رول ضمن الفترة المعطاة

يتبع ←

$\bar{f}(c)=0 \longleftarrow$ نجد قيم C ∴

$\bar{f}(x)=2(x^2-3)^{1}\cdot 2x$

$\bar{f}(c)=4c(c^2-3) \Rightarrow 4c(c^2-3)=0$

$4c=0 \Rightarrow c=0 \in (-1,1)$

$c^2-3=0 \Rightarrow c^2=3 \Rightarrow c=\pm\sqrt{3}$ ⟨ $c=\sqrt{3} \notin (-1,1)$ ، $c=-\sqrt{3} \notin (-1,1)$

$\sqrt{3} = 1.7$ تقريباً

---

⑥ $f(x)=x^3-9x \quad , x\in[-3,3]$

① الداله مستمرة على الفترة المغلقه [3 ، 3-] لانها كثيرة الحدود

② الداله قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحه (3 ، 3-) لانها كثيرة الحدود

③ $f(-3)=(-3)^3-9(-3)=-27+27=0$
$f(3)=(3)^3-9(3)=27-27=0$ $\Big] \Rightarrow f(-3)=f(3)$

∴ الداله تحقق شروط مبرهنه رول ضمن الفترة المعطاة

$\bar{f}(c)=0 \longleftarrow$ نجد قيم C ∴

$\bar{f}(x)=3x^2-9$

$\bar{f}(c)=3c^2-9 \Rightarrow 3c^2-9=0]\div 3 \Rightarrow c^2-3=0 \Rightarrow c=\pm\sqrt{3}$ ⟨ $c=\sqrt{3}\in(-3,3)$ ، $c=-\sqrt{3}\in(-3,3)$

---

⑦ $h(x)=x^3-x \quad , x\in[-1,1]$

① الداله مستمرة على الفترة المغلقه [1 ، 1-] لانها كثيرة الحدود

② الداله قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحه (1 ، 1-) لانها كثيرة الحدود .

③ $h(-1)=(-1)^3+1=-1+1=0$
$h(1)=(1)^3-1=1-1=0$ $\Big] \Rightarrow h(-1)=h(1)$

∴ الداله تحقق شروط مبرهنه رول ضمن الفترة المعطاة ، ∴ نجد قيم C $\longrightarrow \bar{h}(c)=0$

$\bar{h}(x)=3x^2-1$

$\bar{h}(c)=3c^2-1 \Rightarrow 3c^2-1=0 \Rightarrow c^2=\frac{1}{3} \Rightarrow c=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⟨ $c=\frac{1}{\sqrt{3}}\in(-1,1)$ ، $c=\frac{-1}{\sqrt{3}}\in(-1,1)$

* عند وجود كسر مقامه اكبر من بسطه اذا كان ⟨ موجب يكون العدد بين 1 — صفر ، سالب يكون العدد بين صفر — 1-

*ملاحظة: اذا كانت الدالة كسرية لكي نبحث استمرارية الدالة نقوم بجعل المقام يساوي صفر ونجد قيمة x فاذا كانت قيمة x لاتنتمي الى الفترة المغلقة $[a,b]$ فأن الدالة مستمرة وأن كانت قيمة x تنتمي للفترة المغلقة فالدالة غير مستمرة.

وبالنسبة الى قابلية الاشتقاق نقوم باشتقاق الدالة ونطبق نفس خطوات الحل بالنسبة للاستمرارية لكن للفترة المفتوحة.

س/ بين هل أن مبرهنة رول تتحقق لكل من الدوال التالية وجد قيمة c الممكنة.

① $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$ ، $x\in[1,4]$

① الاستمرارية

$\underset{\text{المقام}}{x+2}=0 \Rightarrow x=-2\notin[1,4]$

∴ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[1,4]$

② قابلية الاشتقاق

$f'(x)=\frac{(x+2)(1)-(x-2)(1)}{(x+2)^2}=\frac{\cancel{x}+2-\cancel{x}+2}{(x+2)^2}$

$=\frac{4}{(x+2)^2}\Rightarrow \underset{\text{المقام}}{(x+2)^2}=0\Rightarrow x+2=0\Rightarrow x=-2\notin(1,4)$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(1,4)$

③

$f(1)=\frac{1-2}{1+2}=\frac{-1}{3}$

$f(4)=\frac{4-2}{4+2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow f(1)\neq f(4)$

∴ الدالة لا تحقق شروط مبرهنة رول لان الشرط الثالث لايتحقق

② $f(x)=2x+\frac{2}{x}$ ، $x\in[\frac{1}{2},2]$

① الاستمرارية

$\underset{\text{المقام}}{x}=0\notin[\frac{1}{2},2]$

∴ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[\frac{1}{2},2]$

② قابلية الاشتقاق

$f(x)=2x+2x^{-1}$

$f'(x)=2-2x^{-2}\Rightarrow f'(x)=2-\frac{2}{x^2}$

$\underset{\text{المقام}}{x^2}=0\Rightarrow x=0\notin(\frac{1}{2},2)$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(\frac{1}{2},2)$

③

$f(\frac{1}{2})=2(\frac{1}{2})+\frac{2}{\frac{1}{2}}=1+4=5$

$f(2)=2(2)+\frac{2}{2}=4+1=5$

$\Rightarrow f(\frac{1}{2})=f(2)$

∴ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ضمن الفترة

∴ نجد قيم c $\longleftarrow$ $f'(c)=0$

$\longleftarrow$

$$\acute{f}(x)=2-\frac{2}{x^2}$$

$$\acute{f}(c)=2-\frac{2}{c^2}\Rightarrow 2-\frac{2}{c^2}=0]\times c^2\Rightarrow 2c^2-2=0]\div 2$$

$$c^2-1=0\Rightarrow c^2=1\Rightarrow c=\pm 1 \begin{cases} c=1\in(\frac{1}{2},2) \\ c=-1\notin(\frac{1}{2},2)\end{cases}$$

س بين هل أن الدالة $f(x)=\cos 2x+2\cos x$ في $[0,2\pi]$ تحقق مبرهنة رول ثم جد قيمة c الممكنة .

① الدالة مستمرة على الفترة $[0,2\pi]$.

② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(0,2\pi)$

③
$$f(0)=\cos 0+2\cos 0=1+2(1)=1+2=3$$

$$f(2\pi)=\cos 4\pi+2\cos 2\pi=\cos 0+2\cos 0=1+2(1)=3$$

$$\Rightarrow f(0)=f(2\pi)$$

∴ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ضمن الفترة — اذا كانت الزاوية عدد صحيح زوجي فأنها = صفر

∴ نجد قيم c $\longrightarrow \acute{f}(c)=0$

$$\acute{f}(x)=-\sin 2x\cdot(2)+2(-\sin x\cdot(1))$$

$$\acute{f}(c)=-2\sin 2c-2\sin c\Rightarrow -2\sin 2c-2\sin c=0]\div(-2)$$

$$\sin 2c+\sin c=0$$

$\because \sin 2c=2\sin c\cos c$ — أحد قوانين نصف الزاوية

$$\therefore 2\sin c\cos c+\sin c=0$$

$$\sin c(2\cos c+1)=0$$

عامل مشترك

$$\text{Li } \sin c=0$$

في اي زاوية sin يكونا يساوي صفر

يكون sin يساوي صفر عندما تكون c

① $c=0\notin(0,2\pi)$

② $c=\pi\in(0,2\pi)$

③ $c=2\pi\notin(0,2\pi)$

أو $2\cos c+1=0\Rightarrow 2\cos c=-1\Rightarrow \cos c=\frac{-1}{2}$

في أي زاوية $\cos=\frac{1}{2}$

يكون $\cos=\frac{1}{2}$ عندما تكون c $\longrightarrow$ وهي زاوية الاسناد $\therefore c=\frac{\pi}{3}$

∵ cos سالب

∴ الزاوية تقع في الربع الثاني والثالث

الثاني $\rightarrow c=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\in(0,2\pi)$

الثالث $\rightarrow c=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}\in(0,2\pi)$

س/ بين هل أن الدالة تحقق مبرهنة رول ثم جد قيمة c الممكنة

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , x\in[-1,2] \\ -1 & , x\in[-4,-1) \end{cases}$$

الفترة $[-4,2]$ (البداية / النهاية)

$f(x)=x^2+1 \Rightarrow f(-1)=(-1)^2+1=2$ موجودة

① الاستمرارية عند $x=-1$ لأن العدد المشترك بين الفترتين هو -1

الغاية من اليمين $\lim_{x\to -1} x^2+1=(-1)^2+1=1+1=2=L_1$

الغاية من اليسار $\lim_{x\to -1} -1=-1=L_1$

$\Rightarrow L_1\neq L_2$

∴ الغاية غير موجودة

∴ الدالة ليست مستمرة على الفترة $[-4,2]$

∴ الدالة لا تحقق شروط مبرهنة رول

س/ بين هل أن الدالة تحقق مبرهنة رول ثم جد قيمة c الممكنة

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & , x\in[-3,1] \\ 3x & , x\in(1,\frac{7}{3}] \end{cases}$$

الفترة $[-3,\frac{7}{3}]$

$f(x)=x^2+x+1 \Rightarrow f(1)=1+1+1=3$ موجودة

① الاستمرارية عند $x=1$

$\lim_{x\to 1} x^2+x+1=1+1+1=3=L_1$

$\lim_{x\to 1} 3x=3(1)=3=L_1$

$\Rightarrow L_1=L_2$

$\because f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$

∴ الدالة مستمرة على الفترة $[-3,\frac{7}{3}]$

② قابلية الاشتقاق

نقوم باشتقاق الدالة. عند الاشتقاق تكون الفترات مفتوحة

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & , x\in(-3,1) \\ 3 & , x\in(1,\frac{7}{3}) \end{cases}$$

$f'(x)=2x+1 \Rightarrow f'(1)=2(1)+1=3=L_1$

$f'(x)=3 \Rightarrow f'(1)=3=L_2$

$\Rightarrow L_1=L_2$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-3,\frac{7}{3})$

③ نعوض -3 في الدالة الاولى

$f(-3)=(-3)^2+(-3)+1=9-3+1=7$

نعوض $\frac{7}{3}$ في الدالة الثانية

$f(\frac{7}{3})=3(\frac{7}{3})=7$

$\Rightarrow f(-3)=f(\frac{7}{3})$

∴ نجد قيم c ⟵ $f'(c)=0$

$f(x)=x^2+x+1$

$f'(x)=2x+1$

$f'(c)=2c+1 \Rightarrow 2c+1=0 \Rightarrow c=\frac{-1}{2} \in (-3, \frac{7}{3})$

س/ بين هل أن الداله الآتية تحقق مبرهنة رول ثم جد قيمة c الممكنة $f(x)=k \ , \ x\in[a,b]$

---

① الداله مستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$ لانها داله ثابتة

② الداله قابله للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b)

③
$$\left.\begin{array}{l} f(a)=k \\ f(b)=k \end{array}\right] \Rightarrow f(a)=f(b)$$

∴ الداله تحقق شروط مبرهنة رول .

وأن قيمة c ممكن أن تكون اي قيمة ضمن الفترة (a,b) .

س/ عامه: داله $f(x)=ax^2-4x+5$ تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-1,b]$ فاذا كانت $c=2$ تنتمي للفترة $(-1,b)$ فجد قيمة $a,b\in R$.

∵ الداله تحقق شروط مبرهنة رول

∴ $f'(c)=0$

$f'(x)=2ax-4$

$f'(c)=2ac-4$

بما أن $c=2$ معطاة في السؤال $2ac-4=0 \Rightarrow 2a(2)-4=0$

$4a-4=0 \Rightarrow 4a=4 \Rightarrow a=1$

∴ الداله تكون $f(x)=(1)x^2-4x+5$

∵ الداله تحقق شروط مبرهنة رول

∴ الشرط الثالث يتحقق $f(-1)=f(b)$

$(-1)^2-4(-1)+5=b^2-4b+5$

$1+4+5=b^2-4b+5 \Rightarrow b^2-4b+5=10 \Rightarrow b^2-4b+5-10=0$

$b^2-4b-5=0 \Rightarrow (b-5)(b+1)=0$ ⟨ $b=5$ يحقق ، $b=-1$ لا يحقق

يجب أن تكون نهاية الفترة أكبر من يسارها

واجب

س١ اذا كانت الدالة $f(x) = ax^2 - 5x \; , \; x \in [1,3]$ تحقق مبرهنة رول فجد $a, c \in R$

س٢ اذا كانت $f(x) = x^2 - 4x - 3 \; , \; x \in [1,b]$ داله تحقق مبرهنة رول فجد قيمة $b, c \in R$

س٣ بين هل أن الدالة $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & , x \in (2,5] \\ 2x + 1 & , x \in [-3,2] \end{cases}$ تحقق شروط مبرهنة رول ثم جد قيمة c الممكنة

the Mean value theorem مبرهنة القيمة المتوسطة

أذا كانت الدالة f

① مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$

② قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b)

فأنه يوجد على الاقل قيمة واحدة c تنتمي الى (a,b) وتحقق

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ميل الوتر = ميل المماس

س/ جد قيمة أو قيم c أن تحققت مبرهنة القيمة المتوسطة للدوال

① $f(x)=x^2-6x+4 \quad , \quad x\in[-1,7]$

① الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,7]$ لانها كثيرة الحدود .

② الداله قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,7)$ لانها كثيرة الحدود

$f'(x)=2x-6$

$f'(c)=2c-6$ ميل المماس

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(49-42+4)-(1+6+4)}{7+1}$$

$$=\frac{(11)-(11)}{8}=\frac{0}{8}=0$$ ميل الوتر

∵ ميل الوتر = ميل المماس

$2c-6=0$

$2c=6$

$c=3\in(-1,7)$

② $f(x)=x^3-x-1 \quad , x\in[-1,2]$

① الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,2]$ لانها كثيرة الحدود.

② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,2)$ لانها كثيرة الحدود

$f'(x)=3x^2-1 \Longrightarrow f'(c)=3c^2-1$ ميل المماس

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(8-2-1)-(-1+1-1)}{2+1}=\frac{5-(-1)}{3}=\frac{6}{3}=2$ ميل الوتر

ميل الوتر = ميل المماس

$3c^2-1=2 \Longrightarrow 3c^2=3 \Longrightarrow c^2=1 \Longrightarrow c=\pm1 < \begin{matrix} c=1\in(-1,2) \\ c=-1\notin(-1,2) \end{matrix}$

③ $f(x)=x^2-4x+5 \quad , x\in[-1,5]$

① الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,5]$ لانها كثيرة الحدود

② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,5)$ لانها كثيرة الحدود.

$f'(x)=2x-4 \Longrightarrow f'(c)=2c-4$ ميل المماس

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(25-20+5)-(1+4+5)}{5+1}=\frac{10-10}{6}=\frac{0}{6}=0$ ميل الوتر

ميل الوتر = ميل المماس

$2c-4=0 \Longrightarrow 2c=4 \Longrightarrow c=2\in(-1,5)$.

④ $g(x)=\frac{4}{x+2} \quad , x\in[-1,2]$ راجع ص27 بالنسبة للدالة الكسرية

① الاستمرارية

بما ان الدالة كسرية نجعل المقام = صفر $x+2=0 \Longrightarrow x=-2\notin[-1,2]$

∴ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,2]$

② قابلية الاشتقاق

$g(x)=4(x+2)^{-1}$

$g'(x)=-4(x+2)^{-2}\cdot(1) \Longrightarrow g'(x)=\frac{-4}{(x+2)^2}$

بما أن الدالة كسرية نقوم بجعل المقام = صفر $(x+2)^2=0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x+2=0$

$x=-2\notin(-1,2)$ ∴ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,2)$ ← نتيجة

$\acute{g}(x) = \frac{-4}{(x+2)^2} \Longrightarrow \acute{g}(c) = \frac{-4}{(c+2)^2}$ ميل المماس

$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = \frac{1-4}{2+1} = \frac{-3}{3} = -1$ ميل الوتر .

$g(2) = \frac{4}{2+2} = \frac{4}{4} = 1$

$g(-1) = \frac{4}{-1+2} = \frac{4}{1} = 4$

ميل الوتر = ميل المماس

$\frac{-4}{(c+2)^2} = \frac{-1}{1} \Longrightarrow (c+2)^2 = 4$ بجذر الطرفين.

$c+2 = \pm 2 \Longrightarrow$

$c+2 = 2 \Longrightarrow c = 0 \in (-1,2)$

$c+2 = -2 \Longrightarrow c = -4 \notin (-1,2)$

---

⑤ $f(x) = \sqrt{25-x^2} \quad , x \in [-4,0]$ * الدالة الجذرية

① الاستمرارية

لكي نثبت استمرارية الدالة نقوم اولاً بأثبات الدالة مستمرة في الفترة المفتوحة $(-4,0)$ بعدها عند طرفي الفترة

$\forall a \in (-4,0)$

$f(a) = \sqrt{25-a^2}$

$\lim_{x \to a} f(x) = \sqrt{25-a^2}$

$\Longrightarrow f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

∴ مستمرة في $(-4,0)$

$f(-4) = \sqrt{25-16} = 3$

$\lim_{x \to -4} f(x) = \sqrt{25-16} = 3$

$\Longrightarrow f(-4) = \lim_{x \to -4} f(x)$

$f(0) = \sqrt{25-0} = 5$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \sqrt{25-0} = 5$

$\Longrightarrow f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$

∴ مستمرة عند طرفي الفترة $[-4,0]$

∴ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-4,0]$.

② قابلية الاشتقاق

نقوم باشتقاق الدالة

$\acute{f}(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} \Longrightarrow \acute{f}(x) = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$

بما أن الدالة كسرية نقوم بجعل المقام = صفر (راجع ص 22)

$\sqrt{25-x^2} = 0 \Longrightarrow 25-x^2 = 0$

$x^2 = 25 \longrightarrow x = \pm 5 \notin (-4,0)$

$$\acute{f}(x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \Longrightarrow \acute{f}(c)=\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}$$ ميل المماس

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{5-3}{0+4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$ ميل الوتر

ميل الوتر = ميل المماس

$$\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}=\frac{1}{2} \Longrightarrow \sqrt{25-c^2}=-2c$$ بالتربيع

$$25-c^2=4c^2 \Longrightarrow 5c^2=25 \Longrightarrow c^2=5$$

$$c=\pm\sqrt{5} \begin{cases} c=\sqrt{5} \notin (-4,0) \\ c=-\sqrt{5} \in (-4,0) \end{cases}$$

---

⑥ $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2} \quad , x \in [-2,7]$

① الاستمرارية

نقوم بإثبات الدالة مستمرة في الفترة المفتوحة $(-2,7)$ بعدها عند طرفي الفترة

$\forall a \in (-2,7)$

$$\left.\begin{aligned} f(a)&=\sqrt[3]{(a+1)^2} \\ \lim_{x\to a} f(x)&=\sqrt[3]{(a+1)^2} \end{aligned}\right] \Longrightarrow f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$$

$\therefore$ مستمرة في $(-2,7)$

$$\left.\begin{aligned} f(-2)&=\sqrt[3]{(-2+1)^2}=1 \\ \lim_{x\to -2} f(x)&=\sqrt[3]{(-2+1)^2}=1 \end{aligned}\right] \Longrightarrow f(-2)=\lim_{x\to -2} f(x)$$

$$\left.\begin{aligned} f(7)&=\sqrt[3]{(7+1)^2}=4 \\ \lim_{x\to 7} f(x)&=\sqrt[3]{(7+1)^2}=4 \end{aligned}\right] \Longrightarrow f(7)=\lim_{x\to 7} f(x)$$

$\therefore$ مستمرة عند طرفي الفترة $[-2,7]$

$\therefore$ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-2,7]$

② قابلية الاشتقاق:

$$f(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}} \Longrightarrow \acute{f}(x)=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{-1}{3}} \Longrightarrow \acute{f}(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

$x+1=0$ دالة كسرية نقوم بجعل داخل الجذر مساوياً للصفر (راجع ص 27)

$\therefore x=-1 \in (-2,7)$ $\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق في $(-2,7)$ فلا تتحقق المبرهنة

س١ / استخدم مبرهنة رول ثم مبرهنة القيمة المتوسطة لايجاد قيم c للدالة — عامة

$$f(x)=x^4-2x^2 \quad , x\in[-2,2]$$

باستخدام مبرهنة رول

① الدالة مستمرة على الفترة $[-2,2]$ لانها كثيرة الحدود .

② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-2,2)$ لانها كثيرة الحدود .

③

$$f(-2)=(-2)^4-2(-2)^2=16-2(4)=16-8=8$$
$$f(2)=(2)^4-2(2)^2=16-2(4)=16-8=8$$
$$\Rightarrow f(-2)=f(2)$$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول .

$f'(x)=4x^3-4x$ نجد قيمة $c \longrightarrow f'(c)=0$

$$f'(c)=4c^3-4c \Rightarrow 4c^3-4c=0 \,]\div 4 \Rightarrow c^3-c=0$$

$$c(c^2-1)=0 \Rightarrow c(c-1)(c+1)=0$$

- $c=0\in(-2,2)$
- $c=1\in(-2,2)$
- $c=-1\in(-2,2)$

باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

الشرط الاول والثاني نفس رول

$f'(c)=4c^3-4c$ ميل المماس

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(2)-f(-2)}{2+2}=\frac{8-8}{4}=\frac{0}{4}=0$$ ميل الوتر

ميل الوتر = ميل المماس

$4c^3-4c=0 \Longrightarrow$ (نفس الحل اعلاه)

- $c=0\in(-2,2)$
- $c=1\in(-2,2)$
- $c=-1\in(-2,2)$

س٢/ اذا كانت $f(x)=x^3-4x^2$ ، $f:[0,b] \longrightarrow R$ وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c=\frac{2}{3}$ جد قيمة b .

بما أن الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة

∴ ميل الوتر = ميل المماس

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b^3-4b^2)-0}{b-0}=\frac{b(b^2-4b)}{b}=b^2-4b$$

$f'(x)=3x^2-8x$

$f'(c)=3c^2-8c$ نعوض قيمة c

$f'(\frac{2}{3})=3\frac{4}{9}-8(\frac{2}{3})$

$=\frac{4}{3}-\frac{16}{3}=\frac{-12}{3}=-4$

∵ ميل الوتر = ميل المماس

$-4=b^2-4b \Rightarrow b^2-4b+4=0$

$(b-2)^2=0 \underset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} b-2=0 \Rightarrow b=2$

واجب

س١/ اذا علمت أن $f(x)=x^3+hx^2,\ x\in[-3,1]$ وأن الدالة f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c=-2$ جد قيمة h . $[h=\frac{5}{2}]$ = ج.

س٢/ اذا كانت $f(x)=x^2-6x+7$ حيث $f:[a,3]\longrightarrow R$ وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c=2$ جد قيمة a $[a=1]$ = ج.

س٣/ جد قيمة أو قيم c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لكل مما يأتي

① $f(x)=\frac{1}{x+3}$, $x\in[-2,1]$ $[c\underset{\in}{=}-1,\ c\underset{\notin}{=}-5]$ = ج.

② $f(x)=x+\frac{8}{x}$, $x\in[2,8]$ $[c\underset{\in}{=}4,\ c\underset{\notin}{=}-4]$ = ج.

③ $f(x)=\sqrt{x^2+9}$, $x\in[0,4]$ $[c\underset{\in}{=}\sqrt{3},\ c\underset{\notin}{=}-\sqrt{3}]$ = ج.

④ $f(x)=\sqrt{2x+1}$, $x\in[0,4]$ $[c=\frac{3}{2}]$ = ج.

⑤ $f(x)=4x+\frac{4}{x}$, $x\in[1,4]$ $[c=2]$ = ج.

التقريب باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

① نحدد القيمة المعطاة في السؤال ونرمز لها بالرمز b

② نفرض (a) عدداً قريباً جداً من العدد المعطى بحيث يمكن ايجاد قيمة الدالة بواسطته وبشكل مضبوط (واذا كانت الدالة جذرية يجب أن يكون العدد المقرب (a) له جذر).

③ نجد قيمة h حيث أن $h = b - a$ (الاصلية − المقربة)

④ نجد دالة شكل $f(x)$ مطابقة لما يعطى في السؤال.

⑤ نعوض قيمة a في الدالة $f(x)$ فتخرج قيمة $f(a)$.

⑥ نشتق الدالة $f(x)$ ونعوض قيمة a فيها فتخرج قيمة $f'(a)$

⑦ نجد القيمة التقريبية للمقدار حسب القانون $f(a+h) \cong f(a) + h f'(a)$

س/ باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصورة تقريبية ومقرباً لثلاث مراتب عشرية على الاقل لكل مما يأتي.

① $\sqrt{8}$

$b = 8$

$a = 9$

$h = b - a \Rightarrow h = 8 - 9 = -1$ (h)

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(9) = \sqrt{9} = 3$ ($f(a)$)

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6} = 0.166$ ($f'(a)$)

$f(a+h) \cong f(a) + h f'(a)$

$\cong 3 + (-1)(0.166)$

$\cong 3 - 0.166 \cong 2.834$

② $\sqrt{10}$

1 $b = 10$

2 $a = 9$

3 $h = b - a \Rightarrow h = 10 - 9 = \boxed{1}$ (h)

4 $f(x) = \sqrt{x}$

5 $f(9) = \sqrt{9} = \boxed{3}$ (f(a))

6 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6} = \boxed{0.166}$ (f'(a))

7 $f(a+h) \cong f(a) + h f'(a)$

$\cong 3 + (1)(0.166)$

$\cong 3 + 0.166 \cong 3.166$

③ $\sqrt{17} + \sqrt[4]{17}$

1 $b = 17$

2 $a = 16$

3 $h = b - a \Rightarrow h = 17 - 16 = \boxed{1}$ (h)

4 $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}$

$f(16) = \sqrt{16} + \sqrt[4]{16} = 4 + 2 = \boxed{6}$ (f(a))

$f(x) = \sqrt{x} + x^{\frac{1}{4}}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4} x^{\frac{-3}{4}} \Rightarrow f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} + \frac{1}{4}(16)^{\frac{-3}{4}}$

$f'(16) = \frac{1}{2(4)} + \frac{1}{4}(2^4)^{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{4+1}{32} = \frac{5}{32} = \boxed{0.156}$ (f'(a))

$f(a+h) \cong f(a) + h f'(a)$

$\cong 6 + (1)(0.156)$

$\cong 6 + 0.156 \cong 6.156$

④ $\sqrt{63}+\sqrt[3]{63}$

1 $b=63$

2 $a=64$

3 $h=b-a \Rightarrow h=63-64=\boxed{-1}$ h

4 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$

5 $f(64)=\sqrt{64}+\sqrt[3]{64}=8+4=\boxed{12}$ f(a)

$f(x)=\sqrt{x}+x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

6 $f'(64)=\frac{1}{2\sqrt{64}}+\frac{1}{3}(64)^{\frac{-2}{3}}$

$=\frac{1}{2(8)}+\frac{1}{3}(4^3)^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{16}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}$

$=\frac{1}{16}+\frac{1}{48}=\frac{3+1}{48}=\frac{4}{48}=\frac{1}{12}=\boxed{0.083}$ f'(a)

7 $f(a+h)\cong f(a)+hf'(a)$

$\cong 12+(-1)(0.083)$

$\cong 12-0.083\cong 11.917$

---

⑤ $\sqrt{26}$

$b=26$

$a=25$

$h=b-a \Rightarrow h=26-25=\boxed{1}$ h

$f(x)=\sqrt{x}$

$f(25)=\sqrt{25}=\boxed{5}$ f(a)

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(25)=\frac{1}{2\sqrt{25}}=\frac{1}{10}=\boxed{0.1}$ f'(a)

$f(a+h)\cong f(a)+hf'(a)$

$\cong 5+(1)(0.1)$

$\cong 5+0.1=5.1$

$\sqrt[3]{26}+\sqrt{26}$ ... واجب

* ملاحظات

① في الامثلة التي تحتوي على جذور تربيعية يجب أن تكون عدد المراتب على يمين الفارزة (2) مرتبة او مضاعفتها وأن لم يكن نضيف اصفار .

Ex ① $\sqrt{0.5} = \sqrt{0.50} \Rightarrow b = 0.50 \ , \ a = 0.49 \Rightarrow \sqrt{0.49} = 0.7$

② $\sqrt{0.005} = \sqrt{0.0050} \Rightarrow b = 0.0050 \ , \ a = 0.0049 \Rightarrow \sqrt{0.0049} = 0.07$

② في الامثلة التي تحتوي على جذور تكعيبية يجب أن تكون عدد المراتب على يمين الفارزة (3) مرتبة أو مضاعفتها وأن لم يكن نضيف اصفار

Ex ① $\sqrt[3]{0.12} = \sqrt[3]{0.120} \Rightarrow b = 0.120 \ , \ a = 0.125 \Rightarrow \sqrt[3]{0.125} = 0.5$

② $\sqrt[3]{0.1} = \sqrt[3]{0.100} \Rightarrow b = 0.100 \ , \ a = 0.125 \Rightarrow \sqrt[3]{0.125} = 0.5$

③ في الامثلة التي تحتوي على جذر رابع يجب أن تكون عدد المراتب على يمين الفارزة (4) مرتبة أو مضاعفتها وأن لم يكن نضيف اصفار .

Ex $\sqrt[4]{0.008} = \sqrt[4]{0.0080} \Rightarrow b = 0.0080 \ , \ a = 0.0081 \Rightarrow \sqrt[4]{0.0081} = 0.3$

④ في الامثلة التي تحتوي على جذر خامس يجب أن تكون عدد المراتب على يمين الفارزة (5) مرتبة او مضاعفتها وأن لم يكن نضيف أصفار

Ex $\sqrt[5]{0.0024} = \sqrt[5]{0.00240} \Rightarrow b = 0.00240 \ , \ a = 0.00243 \Rightarrow \sqrt[5]{0.00243} = 0.3$

* في الملاحظات اعلاه نلاحظ أن العدد الصحيح على يسار الفارزة يساوي صفر .

* اذا كان العدد العشري يبدأ بالعدد (9) بعد الفارزة يُقرب الى الواحد مهما يكن دليل الجذر

Ex ① $\sqrt{0.99} \Rightarrow b = 0.99 \ , \ a = 1$ ② $\sqrt[3]{0.98} \Rightarrow b = 0.98 \ , \ a = 1$

③ $\sqrt[4]{0.91} \Rightarrow b = 0.91 \ , \ a = 1$ ④ $7.95 \Rightarrow b = 7.95 \ , \ a = 8$

* اذا كان دليل الجذر فردي وكان العدد داخل الجذر بسالب يمكن اخراج السالب خارج الجذر ثم اضافته الى الناتج في نهاية الحل

$\sqrt[3]{-26} = -\sqrt[3]{26} \Rightarrow b = 26 \ , \ a = 27$

س/ باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة او نتيجتها جد بصورة تقريبية ومقرباً لثلاث مراتب لكل مما يأتي .

① $\sqrt[3]{0.12}$

Sol

$\sqrt[3]{0.120}$

1 $b = 0.120$

2 $a = 0.125$

3 $h = b - a \Rightarrow h = 0.120 - 0.125 = -0.005$

4 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ دالة

5 $f(0.125) = \sqrt[3]{(0.125)} = 0.5$

6 $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}}$

$f'(0.125) = \frac{1}{3}((0.5)^3)^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(0.5)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{0.25}$

$= \frac{1}{0.75} = \frac{100}{75} = \frac{4}{3} = 1.333$

7 $f(a+h) \cong f(a) + h f'(a)$

$\cong 0.5 + (-0.005)(1.333)$

$\cong 0.5 - 0.006 \cong 0.494$

---

② $\sqrt{\frac{1}{2}}$

Sol

$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.5} = \sqrt{0.50}$

1 $b = 0.50$

2 $a = 0.49$

3 $h = b - a = 0.50 - 0.49 = 0.01$

4 5 $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(0.49) = \sqrt{0.49} = 0.7$

6 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(0.49) = \frac{1}{2\sqrt{0.49}} = \frac{1}{2(0.7)} = \frac{1}{1.4} = 0.714$

$f(a+h) \cong f(a) + h f'(a)$

$\cong 0.7 + (0.01)(0.714) \cong 0.7 + 0.007 \cong 0.707$

③ $\sqrt[3]{7.8}$

$b = 7.8$

$a = 8$

$h = b - a \Rightarrow h = 7.8 - 8 = -0.2$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ دالة

$f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$

$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} \Rightarrow f'(8) = \frac{1}{3} (8)^{\frac{-2}{3}}$

$f'(8) = \frac{1}{3} (2^3)^{\frac{-2}{3}} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{12} = 0.083$

$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$

$\cong 2 + (-0.2)(0.083)$

$\cong 2 - 0.0166 \cong 1.983$

---

④ $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

$b = 9$

$a = 8$

$h = b - a \Rightarrow h = 9 - 8 = 1$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ دالة

$f(8) = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2} = 0.5$

$f(x) = x^{\frac{-1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{3} x^{\frac{-4}{3}} \Rightarrow f'(8) = \frac{-1}{3} (8)^{\frac{-4}{3}}$

$f'(8) = \frac{-1}{3} (2^3)^{\frac{-4}{3}} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{-1}{48} = -0.020$

$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$

$\cong 0.5 + (1)(-0.020)$

$\cong 0.5 - 0.020 \cong 0.480$

⑤ $\frac{1}{101}$

$b=101$

$a=100$

$h=b-a \Rightarrow h=101-100=1$

$f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f(100)=\frac{1}{100}=0.01$

$f(x)=x^{-1} \Rightarrow f'(x)=-x^{-2} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x^2}$

$f'(100)=\frac{-1}{10000}=0.0001$

$f(a+h) \cong f(a)+hf'(a)$

$\cong 0.01+(1)(-0.0001) \cong 0.01-0.0001 \cong 0.0099$

س/ اذا كانت $f(x)=x^3+3x^2+4x+5$ فجد بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة $f(1.001)$

$b=1.001$

$a=1$

$h=b-a=1.001-1=0.001$

$f(x)=x^3+3x^2+4x+5$. الدالة معطاة في السؤال.

$f(1)=(1)^3+3(1)^2+4(1)+5=1+3+4+5=13$

$f'(x)=3x^2+6x+4 \Rightarrow f'(1)=3(1)^2+6(1)+4=3+6+4=13$

$f(a+h) \cong f(a)+hf'(a)$

$\cong 13+(0.001)(13) \cong 13+0.013 \cong 13.013$

س/ $\frac{2013}{1}$ عامة اذا كانت $f(x)=\sqrt[5]{31x+1}$ جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة القيمة التقريبية $f(1.01)$.

$b=1.01$

$a=1$

$h=b-a \Rightarrow h=1.01-1=0.01$

تتبع ←

$f(x)=\sqrt[5]{31x+1}$ الداله معطاة في السؤال

$f(1)=\sqrt[5]{31(1)+1}=\sqrt[5]{32}=2$

$f(x)=(31x+1)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{5}(31x+1)^{\frac{-4}{5}}\cdot(31)$

مشتقه داخل القوس

$f'(1)=\frac{31}{5}(31+1)^{\frac{-4}{5}}=\frac{31}{5}(2^5)^{\frac{-4}{5}}=\frac{31}{5}\cdot\frac{1}{2^4}$

$f'(1)=\frac{31}{5}\cdot\frac{1}{16}=\frac{31}{80}=0.3875$

$f(a+h)\cong f(a)+hf'(a)$

$\cong 2+(0.01)(0.3875)\cong 2+0.0038\cong 2.0038$

س جد تقريباً لكل مما يأتي باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

① $(1.04)^3+3(1.04)^4$

$b=1.04$

$a=1$

$h=b-a \Rightarrow h=1.04-1=0.04$

$f(x)=(x)^3+3(x)^4$ داله $\Rightarrow f(1)=(1)^3+3(1)^4=1+3=4$

$f'(x)=3x^2+12x^3 \Rightarrow f'(1)=3(1)^2+12(1)^3=3+12=15$

$f(a+h)\cong f(a)+hf'(a)$

$\cong 4+(0.04)(15)\cong 4+0.60\cong 4.6$

② $\sqrt[5]{(0.98)^3}+(0.98)^4+3$

$b=0.98$

$a=1$

$h=b-a \Rightarrow 0.98-1=-0.02$

$f(x)=\sqrt[5]{x^3}+x^4+3$ داله

$f(1)=\sqrt[5]{(1)^3}+(1)^4+3=1+1+3=5$

$f(x)=x^{\frac{3}{5}}+x^4+3 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}}+4x^3$ ← يتبع

$\acute{f}(1) = \frac{3}{5}(1)^{\frac{-2}{5}} + 4(1)^3 = \frac{3}{5} + 4 = \frac{3+20}{5} = \frac{23}{5} = 4.6$

$f(a+h) \cong f(a) + h\acute{f}(a)$

$\cong 5 + (-0.02)(4.6) \cong 5 - 0.092 \cong 4.908$

س/ مكعب طول حرفه 9.98cm جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

ملاحظة : في الاسئلة الكلامية التي تحتوي على حجوم ومساحات ---- نقوم بتهيئة الدالة او العلاقة من حجم او مساحة او نصف قطر او... قبل البدء بالحل.

نفرض حجم المكعب V ، طول حرفه x

$\therefore \underset{?}{V} = x^3$

1 $b = 9.98$

2 $a = 10$

3 $h = b - a \Rightarrow h = 9.98 - 10 = -0.02$

4 $V = x^3$ دالة الحجم

5 $V(10) = (10)^3 = 1000$

6 $\acute{V} = 3x^2 \Rightarrow \acute{V}(10) = 3(10)^2 = 300$

7 $V(a+h) \cong V(a) + h\acute{V}(a)$

$\cong 1000 + (-0.02)(300) \cong 1000 - 6 \cong 994\ cm^3$

س/ مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته فاذا كان ارتفاعه يساوي 2.98cm فجد حجمه بصورة تقريبية باستخدام القيمة المتوسطة او نتيجتها.

نفرض حجم المخروط V ، نصف القطر r ، الارتفاع h

$\underset{?}{V} = \frac{1}{3} r^2 \pi h$

* ملاحظة : المطلوب الحجم وان هناك متغيرين هما r,h اذن يجب ان يبقى احدهما بما ان في السؤال قد اعطى الارتفاع h اذن يجب ان يذهب r ويبقى h

$\because h = 2r$ معلومة معطاة في السؤال

$\therefore r = \frac{h}{2}$

نعوض عن قيمة r في V

$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2 h$

$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h^2}{4}\right) h$

$V = \frac{\pi}{12} h^3$ دالة الحجم

1 $b = 2.98$

2 $a = 3$

3 $h = b - a \Rightarrow 2.98 - 3 = \boxed{-0.02}$

4 $V = \frac{\pi}{12} h^3$ دالة حجم

5 $V(3) = \frac{\pi}{12}(3)^3 = \frac{\pi}{12}(27) = \frac{9\pi}{4} = \boxed{2.25\pi}$

6 $V' = \frac{\pi}{12}(3h^2) \Rightarrow V' = \frac{\pi}{4} h^2 \Rightarrow V'(3) = \frac{\pi}{4}(3)^2 = \frac{9\pi}{4} = \boxed{2.25\pi}$

7 $V(a+h) \cong V(a) + hV'(a)$

$\cong 2.25\pi + (-0.02)(2.25\pi) \cong 2.25\pi - 0.045\pi \cong 2.205\pi \, cm^3$

س عاصمة مم متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاثة أمثال طول قاعدته، جد الحجم التقريبي له عندما يكون طول قاعدته 2.97cm .

نفرض حجم المتوازي V ، الارتفاع h ، طول ضلع القاعدة x

$V = x^2 \cdot h$ (V ؟)

وجود متغيرين x ، h يجب أن يبقى واحد
بما أن اعطيه طول ضلع القاعدة x
اذن يجب أن يذهب h ويبقى x

$h = 3x$ معلومة معطاة في السؤال

نعوض h في V

$\therefore V = x^2 \cdot 3x$

$V = 3x^3$ دالة الحجم

1 $b = 2.97$

2 $a = 3$

3 $h = b - a \Rightarrow h = 2.97 - 3 = \boxed{-0.03}$

4 $V = 3x^3$ دالة حجم

5 $V(3) = 3(3)^3 = 3(27) = \boxed{81}$

6 $V' = 9x^2 \Rightarrow V'(3) = 9(3)^2 = 9(9) = \boxed{81}$

7 $V(a+h) \cong V(a) + hV'(a)$

$\cong 81 + (-0.03)(81)$

$\cong 81 - 2.43$

$\cong 78.57 \, cm^3$

س/ كرة حجمها $84\pi\ cm^3$ ، جد نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة

نفرض حجم الكرة V ، نصف القطر r

$V = \frac{4}{3} r^3 \pi$

الدالة المطلوبة في السؤال هي دالة نصف القطر لذلك نقوم بتعويض المعلومات المعطاة في السؤال لكي نهيأ دالة نصف القطر

$V = \frac{4}{3} r^3 \pi$

$\because V = 84\pi$

$\therefore 84\pi = \frac{4}{3} r^3 \pi$

$\frac{84}{1} = \frac{4}{3} r^3$

$21 = \frac{1}{3} r^3 \quad] \times 3$

$63 = r^3 \Rightarrow r^3 = 63 \Rightarrow r = \sqrt[3]{63}$ دالة نصف القطر

1 $b = 63$

2 $a = 64$

3 $h = b - a \Rightarrow h = 63 - 64 = -1$

4 $r = \sqrt[3]{x}$ دالة نصف قطر

5 $r(64) = \sqrt[3]{64} = 4$

6 $r = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow r' = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} \Rightarrow r'(64) = \frac{1}{3}(64)^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3}(4^3)^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^2}$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{48} = 0.02$

7 $r(a+h) \cong r(a) + h r'(a)$

$\cong 4 + (-1)(0.02) \cong 4 - 0.02 \cong 3.98\ cm$

س/ مخروط دائري قائم حجمه $210\pi\ cm^3$ جد القيمة التقريبية لنصف قطر قاعدته إذا كان ارتفاعه 10cm

نفرض حجم المخروط V ، نصف القطر r ، الارتفاع h

$V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$

نقوم بتعويض المعلومات المعطاة في السؤال لكي نهيأ دالة نصف القطر

$210\pi = \frac{1}{3} r^2 \pi\, 10 \quad] \div 10\pi$

$21 = \frac{1}{3} r^2 \quad] \times 3$

$63 = r^2 \Rightarrow r^2 = 63 \Rightarrow r = \sqrt{63}$ دالة نصف القطر

$b = 63$

$a = 64$

$h = b - a \Rightarrow h = 63 - 64 = -1$

4 $r = \sqrt{x}$ دالة نفرضها

5 $r(64) = \sqrt{64} = 8$

6 $\acute{r} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \acute{r}(64) = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{16} = 0.0625$

7 $r(a+h) \cong r(a) + h\,\acute{r}(a)$

$\cong 8 + (-1)(0.0625)$

$\cong 8 - 0.0625 \cong 7.9375 \text{ cm}$

س: مكعب حجمه 7.98 cm^3 جد طول حرفه بصورة تقريبية وباستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

نفرض حجم المكعب V ، طول ضلعه x

$V = \underbrace{x^3}_{?}$

$V = x^3 \Longrightarrow 7.98 = x^3$

بجذر الطرفين.

$x = \sqrt[3]{7.98}$

الدالة المطلوبة هي دالة طول ضلع المكعب
اذن نعوض المعلومات المعطاة في
السؤال لكي نهيأ دالة طول الضلع

1 $b = 7.98$

2 $a = 8$

أكمل حل السؤال .ج = [1.983 cm]

س: مربع مساحته 48 cm^2 جد بصورة تقريبية طول ضلعه وباستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

نفرض طول ضلع المربع x ، المساحة A

مساحة المربع = (طول الضلع)^2

$48 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{48}$

بجذر الطرفين.

$b = 48$

$a = 49$

أكمل الحل .ج = [6.929 cm]

* مقدار التغير التقريبي للدالة $\cong h\acute{f}(a)$

ويسمى في بعض الاسئلة : مقدار الزيادة ، مقدار النقص ، مقدار الخطأ ، كمية الجليد ، كمية الطلاء أو حجم الطلاء ، حجم المادة المصنوع منها الشكل .

س / لتكن $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ فاذا تغيرت x من 8 الى 8.06 فما مقدار التغير التقريبي .

$b=8.06$

$a=8$

$h=b-a \Rightarrow h=8.06-8=\boxed{0.06}$

$f(x)=\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f(x)=x^{\frac{2}{3}}$

$\acute{f}(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} \Rightarrow \acute{f}(8)=\frac{2}{3}(8)^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3}(2^3)^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}=\boxed{0.333}$

مقدار التغير $\cong h\acute{f}(a)$

$\cong(0.06)(0.333)\cong 0.01998$

* ملاحظة : عندما يعطي سمك المادة هذا يعني اعطاء قيمة h مباشر

① في المكعب يكون $h=2$ (سمك) نضرب في 2

② في الكرة يكون $h=$ سمك لا نضرب في 2

س / يراد طلاء مكعب طول ضلعه 10cm فاذا كان سمك الطلاء 0.15cm اوجد حجم الطلاء بصورة تقريبية وباستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

نفرض حجم المكعب V

طول ضلعه x

$V=x^3$

$\because$ السمك $=0.15$ ، $a=10$

$\therefore h=2($سمك$) \Rightarrow h=2(0.15)=\boxed{0.3}$

$V=x^3 \Rightarrow \acute{V}=3x^2 \Rightarrow \acute{V}(10)=3(10)^2=\boxed{300}$

حجم الطلاء $\cong h\acute{V}(a)\cong(0.3)(300)\cong 90\,cm^3$

س / كرة نصف قطرها 6cm طليت بطلاء سمكه 0.1cm جد حجم الطلاء بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

نفرض حجم الكرة V

نصف القطر r

$V=\frac{4}{3}r^3\pi$

$\because$ السمك $=0.1$ ، $a=6$

$\therefore h=$ سمك $\Rightarrow h=\boxed{0.1}$

$V=\frac{4}{3}r^3\pi \Rightarrow \acute{V}=\frac{4}{3}(3r^2\pi)=4\pi r^2$

$\acute{V}(6)=4\pi(6)^2=\boxed{144\pi}$

حجم الطلاء $\cong h\acute{V}(a)\cong(0.1)(144\pi)\cong 14.4\pi\,cm^3$

واجب

س1 مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي نصف قطر قاعدته جد بصورة تقريبية مقدار التغير في حجمه عندما يتغير ارتفاعه من 5cm الى 5.02cm
ج= [0.5π cm]

س2 كرة مجوفة نصف قطرها من الداخل (6 cm) ومن الخارج (6.2 cm) جد حجم المادة المصنوعة منها الكرة بصورة تقريبية
ج= [$2.88\pi\ cm^3$]

س3 (2/96) جد باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة او نتيجتها القيمة التقريبية الى $\sqrt[4]{80}$
ج= [2.991]

س4 (2/97) مربع مساحته ($50\ cm^2$) جد بصورة تقريبية طول ضلعه باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة او نتيجتها
ج= [7.07]

س5 (2/98) اذا كانت $f(x)=\sqrt[3]{2x+6}$ جد $f(1.02)$ باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة او نتيجتها
ج= [2.003]

س6 (1/...) مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي نصف قطر قاعدته جد القيمة التقريبية لتغير حجمه اذا تغير ارتفاعه من 4 الى 4.01
ج= [$0.16\pi\ cm^3$]

س7 (2/2001) جد باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة او نتيجتها القيمة التقريبية الى $\sqrt[3]{126}$
ج= [5.013]

س8 (2/2006) جد باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة القيمة التقريبية للعدد $\sqrt[3]{-9}$
ج= [-2.083]

س9 (2/2007) جد باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة او نتيجتها القيمة التقريبية للعدد $\sqrt[4]{0.008}$
ج= [0.299]

س10 جد بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة $\sqrt{80}+\sqrt[4]{80}$

س11 اسطوانة دائرية قائمة حجمها $240\pi\ m^3$ وارتفاعها 10m احسب طول نصف قطر قاعدتها بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة
ج= [4.9m]

س12 كرة حجمها $12\pi\ cm^3$ اوجد طول نصف قطرها باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة بصورة تقريبية ج= [2.08cm]

س13 اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوي الى قطر قاعدتها تتغير نصف قطر قاعدتها من 4 cm الى 4.01 cm اوجد مقدار التغير التقريبي لتغير حجمها
ج= [$0.48\pi\ cm^3$]

النهايات العظمى والصغرى المحلية ومناطق التزايد والتناقص

أولاً: باستخدام المشتقة الاولى .

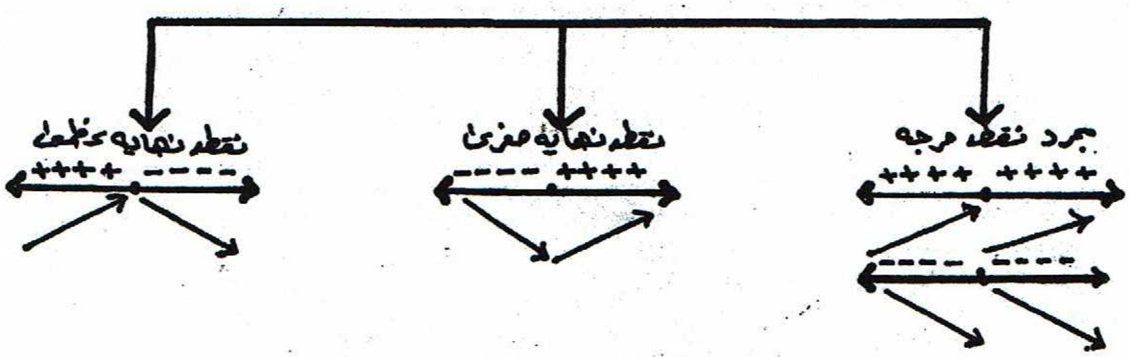
① نشتق الدالة مشتقة اولى ونساويها المشتقة بالصفر $f'(x)=0$ ونجد قيم x الحرجة

② نضع قيم x على خط الاعداد تصاعدياً ونقوم بالاختبار وذلك بأخذ قيم اكبر من x وقيم اصغر منها ونعوضها في المشتقة الاولى ونأخذ فقط الاشارة نثبتها على خط الاعداد ونلاحظ مايلي .

a اذا كان الناتج قيمة موجبة فأن الدالة تكون متزايدة ↗

b اذا كان الناتج قيمة سالبة فأن الدالة تكون متناقصة ↘

③ نقوم بايجاد النقاط الحرجة وذلك بتعويض قيم x بالدالة الاصلية لكي نجد قيمة y حتى تكون النقطة (x,y) ولبيان نوع النقطة نلاحظ المخطط الاتي .



س/ جد مناطق التزايد والتناقص ونقط النهايات العظمى والصغرى أن وجدت لكل من الدوال

① $f(x)=x^2-4x+3$

$f'(x)=2x-4 \ , \ f'(x)=0$

$2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$ حرجة

$x<2$ ---- 2 +++++ $x>2$ ، $f'(x)=2x-4$ ، صغرى

f متزايدة في $\{x: x>2\}$

f متناقصة في $\{x: x<2\}$

$x=2$

$f(2)=(2)^2-4(2)+3=4-8+3=-1=y$

$\therefore (2,-1)$ نقطة نهاية صغرى محلية

توضيح كيفية الاختبار

① نقوم بأخذ قيمة اكبر من 2 ولتكن 3 نعوضها في المشتقة الاولى

$f'(x)=2x-4$

$f'(3)=2(3)-4=6-4=2$ (الاشارة موجبة)

② نقوم بأخذ قيمة اصغر من 2 ولتكن 1 نعوضها في المشتقة الاولى

$f'(1)=2(1)-4$

$=2-4=-2$ (الاشارة سالبة)

* ملاحظة: في اختبار خط الاعداد فائدتان

① نجد مناطق التزايد والتناقص

② نجد نقطة النهاية وذلك بتعويض قيم x في الدالة الاصلية لكي نجد y

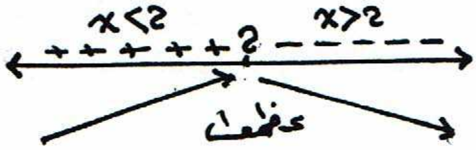
⑫ $f(x) = \underset{\text{صفر}}{1} - (x - \underset{\text{سابعه}}{2})^2$

$f'(x) = -2(x-2)^1(1) \quad , f'(x) = 0$

$-2(x-2) = 0 \;]\div(-2)$

* نتبع نفس خطوات السؤال السابق في الاختبار و ايجاد النهايات

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ حرجه



$f'(x) = -2(x-2)$

f متزايده في $\{x : x < 2\}$

f متناقصه في $\{x : x > 2\}$

$x = 2$

$f(2) = 1 - (2-2)^2 = 1 - 0 = 1 = y$

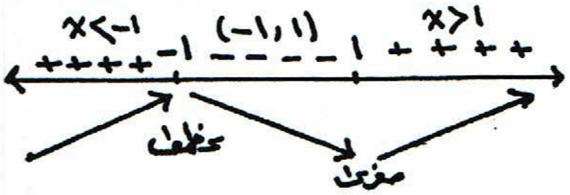
$\therefore (2,1)$ نقطة نهايه عظمى محليه

---

⑬ $f(x) = x^3 - 3x$

$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad , f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \;]\div 3 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ حرجه



$f'(x) = 3x^2 - 3$

$x = -1$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2 = y$

$(-1, 2)$ نقطة نهايه عظمى محليه

f متزايده في $\{x : x < -1\}, \{x : x > 1\}$

f متناقصه في الفترة المفتوحه $(-1, 1)$

$x = 1$

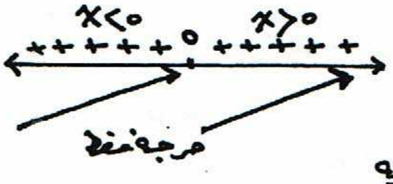
$f(1) = (1)^3 - 3(1) = 1 - 3 = -2 = y$

$(1, -2)$ نقطه نهايه صغرى محليه

---

⑭ $f(x) = x^5$

$f'(x) = 5x^4 \; , f'(x) = 0 \Rightarrow 5x^4 = 0 \;]\div 5 \Rightarrow x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$ حرجه



f متزايده في $\{x : x < 0\}, \{x : x > 0\}$ لا تمثل نهايه

$x = 0$

$f(0) = (0)^5 = 0 = y$

(0,0 [illegible]

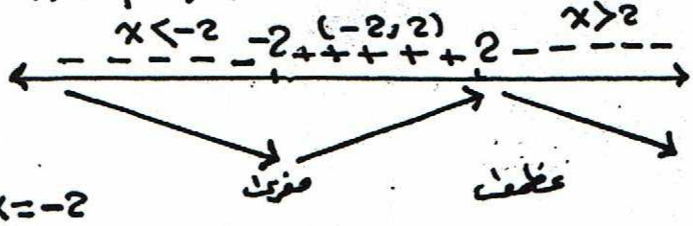
⑤ $f(x) = \frac{2x}{x^2+4}$ *دالة كسرية

$f'(x) = \frac{(x^2+4)(2)-(2x)(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{2x^2+8-4x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}=0 \Rightarrow 8-2x^2=0$ * كلا كسر عندما يكون يساوي صفر يهمل المقام ونأخذ البسط فقط ونساويه بالصفر

$8-2x^2=0] \div 2 \Rightarrow 4-x^2=0$

$x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$ حرجة



f متزايدة في الفترة المفتوحة (2,2-)

f متناقصة في $\{x: x<-2\}$ ، $\{x: x>-2\}$

$x=-2$

$f(-2)=\frac{2(-2)}{(-2)^2+4}=\frac{-4}{8}=\frac{-1}{2}=y$

$(-2, \frac{-1}{2})$ نقطة نهاية صغرى محلية

$x=2$

$f(2)=\frac{2(2)}{(2)^2+4}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}=y$

$(2, \frac{1}{2})$ نقطة نهاية عظمى محلية

---

⑥ $f(x)=\frac{2x-6}{x-1}$

$f'(x)=\frac{(x-1)(2)-(2x-6)(1)}{(x-1)^2}=\frac{\cancel{2x}-2-\cancel{2x}+6}{(x-1)^2}=\frac{4}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 4=0$ ⟵ من غير الممكن أن تكون

البسط فقط يساوي بالصفر (الملاحظة أعلاه)

∴ الدالة لا تمتلك نهايات ولا نقاط حرجة

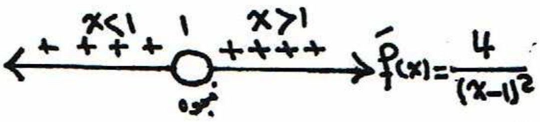
* ملاحظة: في حالة وجود كسر مساوياً للصفر وكان في بسطه عدد فقط فإن من غير الممكن أن يكون العدد يساوي صفر إذن سوف تكون الحالة

① الدالة لا تمتلك نهايات ولا نقاط حرجة.

② نجد مناطق التزايد والتناقص فقط وذلك بأن نأخذ المقام ونجعله = صفر ونجد قيم x (مجهول) ونختبرها على خط الاعداد في $f'(x)$

$(x-1)^2=0 \Rightarrow x-1=0$ (المقام)

$x=1$ (مجهول)



∴ f متزايدة في $\{x: x<1\}$ ، $\{x: x>1\}$

⑦ $f(x)=\frac{1}{x^2}$

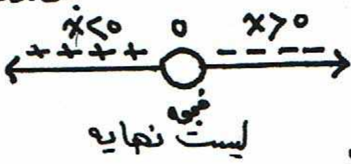
$f(x)=x^{-2} \Rightarrow \acute{f}(x)=-2x^{-3}=\frac{-2}{x^3}$, $\acute{f}(x)=0 \Rightarrow -2=0$ غير ممكن

∴ الداله لاتمتلك نهايات ولانقاط حرجه

نجد مناطق التزايد والتناقص فقط

$x^3=0 \Rightarrow x=0$ (فجوه)

المقام حسب الملاحظه في السؤال السابق



$\acute{f}(x)=\frac{-2}{x^3}$

f متزايده في $\{x: x<0\}$

f متناقصه في $\{x: x>0\}$

⑧ $f(x)=5x+1$

* دوال الدرجه الاولى ودوال (مجموع مربعين بعد الاشتقاق) هذه الدوال لاتمتلك نهايات ولانقاط حرجه

$\acute{f}(x)=5$, $\acute{f}(x)=0$

$5=0$ غير ممكن

∴ الداله لاتمتلك نهايات ولانقاط حرجه والداله متزايده لانها موجبه.

⑨ $f(x)=3-4x$

$\acute{f}(x)=-4$, $\acute{f}(x)=0 \Rightarrow -4=0$ غير ممكن

∴ الداله لاتمتلك نهايات ولانقاط حرجه والداله متناقصه لانها سالبه

⑩ $f(x)=x^3+3x$

$\acute{f}(x)=3x^2+3$, $\acute{f}(x)=0 \Rightarrow 3x^2+3=0$ غير ممكن

↑ مجموع مربعين

توضيح

$3x^2+3=0] \div 3$

$x^2+1=0$

$x^2=-1$

$x=\pm\sqrt{-1}$

$\notin R$

∴ الداله لاتمتلك نهايات ولانقاط حرجه والداله متزايده

واجب

س جد النهايات أن وجدت ومناطق التزايد والتناقص للدوال

① $f(x)=(x+2)(x-1)^2$

* يفضل فتح الاقواس وجمع الحدود ثم الاشتقاق فتكون الداله $f(x)=x^3-3x+2$

ج = [عظمى $(-1,4)$ ، صغرى $(1,0)$]

② $f(x)=\frac{6}{x^2+3}$

ج = [عظمى $(0,2)$]

③ $f(x)=\frac{3x-1}{\ldots}$

ج = الداله لاتمتلك نهايات ولانقاط حرجه

ثانياً: استخدام المشتقة الثانية في تحديد النهايات

① نشتق الدالة مشتقة اولى و نساوي المشتقة بالصفر $\acute{f}(x)=0$ ونجد قيم x الحرجة .

② نشتق الدالة مشتقة ثانية ونعوض في المشتقة الثانية قيم x الحرجة ونلاحظ مايلي

أ) اذا كان الناتج عدد سالب فأن الدالة تمتلك نهاية عظمى .

ب) اذا كان الناتج عدد موجب فأن الدالة تمتلك نهاية صغرى .

ج) اذا كان الناتج يساوي صفر فأن هذه الطريقة تكون غير صحيحة لذلك نقوم بالرجوع الى الطريقة الاولى في ايجاد النهايات وهي المشتقة الاولى والاختبار على خط الاعداد .

③ نقوم بايجاد النقاط الحرجة وذلك بتعويض قيم x بالدالة الاصلية لكي نجد y حتى تكون النقطة (x,y)

س/ باستخدام اختبار المشتقة الثانية أن أمكن جد النهايات المحلية للدوال الآتية.

① $f(x)=x^3-3x^2-9x$

$\acute{f}(x)=3x^2-6x-9$

$\acute{f}(x)=0$

$3x^2-6x-9=0\ ]\div 3$

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$x-3=0 \Rightarrow x=3$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$\acute{\acute{f}}(x)=6x-6$

نعوض قيم x الحرجة في $\acute{\acute{f}}(x)$

① عندما $x=3$

$\acute{\acute{f}}(3)=6(3)-6=18-6=12$ عدد موجب

∴ الدالة تمتلك نهاية صغرى ، نجد نقطة النهاية وذلك بتعويض قيمة x بالدالة الاصلية $x=3$

$f(3)=(3)^3-3(3)^2-9(3)=-27=y$

∴ نقطة نهاية صغرى محلية $(3,-27)$

② عندما $x=-1$

$\acute{\acute{f}}(-1)=6(-1)-6=-6-6=-12$ عدد سالب

∴ للدالة نهاية عظمى $x=-1$

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-9(-1)=5=y$

∴ نقطة نهاية عظمى محلية $(-1,5)$

② $f(x)=6x-3x^2-1$

$\acute{f}(x)=6-6x$

$\acute{f}(x)=0 \Rightarrow 6-6x=0\ ]\div 6$

$1-x=0 \Rightarrow x=1$ حرجة

$\acute{\acute{f}}(x)=-6$

نعوض قيمة x الحرجة في $\acute{\acute{f}}(x)$ عندما $x=1$

$\acute{\acute{f}}(1)=-6$ عدد سالب

∴ الدالة تمتلك نهاية عظمى $x=1$

$f(1)=6(1)-3(1)^2-1=2=y$ ، $(1,2)$ نهاية عظمى

② $f(x) = 4 - (x+1)^4$ (ثابت، سابقه)

$f'(x) = 0 - 4(x+1)^3(1)$

$f'(x) = 0$

$-4(x+1)^3 = 0] \div (-4)$

$(x+1)^3 = 0$ بالجذر

$x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$ مرجه

$+ + + + \; -1 \; - - - -$ → $f'(x) = -4(x+1)^3$

عظمى

$x = -1$

$f(-1) = 4 - (-1+1)^3 = 4 - 0 = 4 = y$

$(-1, -4)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$f''(x) = -12(x+1)^2(1)$

نعوض قيمة x الحرجة في $f''(x)$

$x = -1$

$f''(-1) = -12(-1+1)^2$

$= -12(0)^2$

$= 0$

∴ هذه الطريقة غير صحيحة لذلك نقوم بالرجوع الى الطريقة الاولى لايجاد النهايات باستخدام المشتقة الاولى والاختبار على مخطط الاشارات

f متزايدة في $\{x : x < -1\}$

f متناقصة في $\{x : x > -1\}$

س / 2008، 2013 / 1

لتكن $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}$ برهن أن الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية، $a \in R$، $x \neq 0$

$f(x) = x^2 - ax^{-1}$

$f'(x) = 2x + ax^{-2}$ ⟶ $f''(x) = 2 - 2ax^{-3}$

$f'(x) = 0$

$2x + \frac{a}{x^2} = 0] \times x^2$

$2x^3 + a = 0 \Rightarrow 2x^3 = -a$

$x^3 = \frac{-a}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{-a}{2}}$

لا يمكن ايجاد النهايات بالطريقة الاولى (المشتقة الاولى) والاختبار على مخطط الاشارات لانه لا نعرف قيمة a (اي لا نستطيع أن نأخذ قيم اكبر وقيم اصغر من a لكي نحدد الاشارة) لذلك يجب علينا استخدام المشتقة الثانية لمعرفة النهايات.

$f''(x) = 2 - \frac{2a}{x^3}$

نعوض قيمة x بالمشتقة الثانية

$x = \sqrt[3]{\frac{-a}{2}}$

$f''\left(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}\right) = 2 - \frac{2a}{\frac{-a}{2}}$

$= 2 + \frac{2}{\frac{1}{2}}$

$= 2 + 4 = 6$ الصحيح موجب

∴ الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية ولا يمكن أن تمتلك نهاية عظمى محلية

س / واجب: جد باستخدام المشتقة الثانية أن امكن النهايات العظمى والصغرى للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2$

ج. [(0,0) عظمى ، (2,-4) صغرى]

س / واجب: اثبت أن الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى، $x \in R$، $x \neq 0$ ، $f(x) = x^2 - \frac{1}{...}$

* نقط الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب

① نجد المشتقة الثانية للدالة ونساويها بالصفر ونجد قيم x المرشحة ، $f''(x)=0$

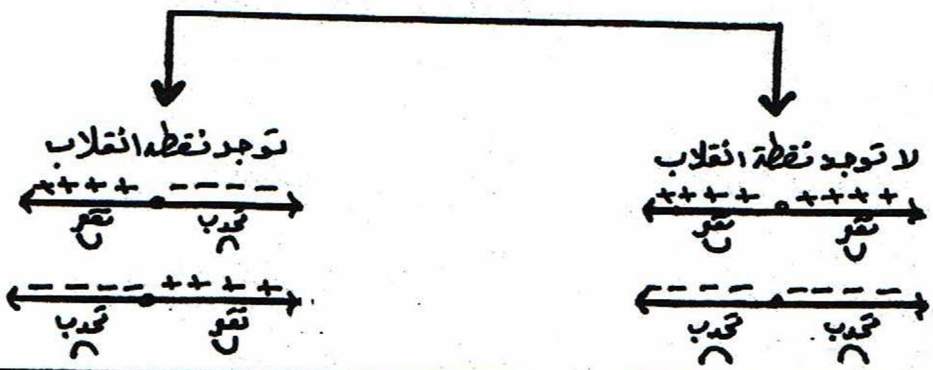
② نضع قيم x المرشحة على خط الاعداد تصاعدياً ونقوم بالاختبار وذلك بأخذ قيم اكبر من قيم x وقيم أصغر منها ونعوضها في المشتقة الثانية ونأخذ الاشارة فقط نثبتها على خط الاعداد ونلاحظ مايلي

a) اذا كان الناتج موجب فتكون مقعرة + + + ∪

b) اذا كان الناتج سالب فتكون محدبة − − − ∩

* نقطة الانقلاب : اذا كان الاشارة حول قيمة x المرشحة تتغير من تقعر الى تحدب وبالعكس تسمى نقطة انقلاب

* لايجاد نقاط الانقلاب نعوض قيم x المرشحة بالدالة الاصلية لكي نجد y حتى تكون النقطة (x,y)

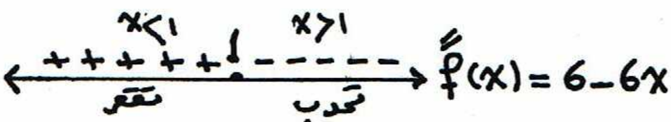


س/ جد نقاط الانقلاب ان وجدت ومناطق التقعر والتحدب للدوال الآتية

① $f(x)=3x^2-x^3$

$f'(x)=6x-3x^2 \Rightarrow f''(x)=6-6x$, $f''(x)=0$

$6-6x=0] \div 6 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$ مرشحة



f مقعرة في $\{x : x<1\}$

f محدبة في $\{x : x>1\}$

$x=1$ (انقلاب)

نجد نقطة الانقلاب وذلك بتعويض قيمة x بالدالة الاصلية

$f(1)=3(1)^2-(1)^3=3-1=2$, $(1,2)$ نقطة انقلاب

② $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$

$f'(x) = 4x^3 - 12x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 12 \quad , f''(x) = 0$

$12x^2 - 12 = 0 \;]\div 12 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ مرشح

$x < -1$: $+ + + +$ | -1 | $(-1, 1)$: $- - - -$ | 1 | $x > 1$: $+ + + +$ ⟶ $f''(x) = 12x^2 - 12$

تقعر | تحدب | تقعر

f مقعر في $\{x \mid x < -1\}, \{x \mid x > 1\}$

$x = -1$ (انقلاب)

f محدب في الفترة المفتوحة $(-1, 1)$

$f(-1) = (-1)^4 - 6(-1)^2 + 1 = 1 - 6 + 1 = -4 \;, (-1, -4)$ نقطة انقلاب

$x = 1$ (انقلاب)

$f(1) = (1)^4 - 6(1)^2 + 1 = 1 - 6 + 1 = -4 \;, (1, -4)$ نقطة انقلاب

---

③ $f(x) = 4 - (x+2)^4$

$f'(x) = -4(x+2)^3 \Rightarrow f''(x) = -12(x+2)^2 \quad , f''(x) = 0$

$-12(x+2)^2 = 0 \;]\div(-12) \Rightarrow (x+2)^2 = 0$ بالجذر

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ مرشح

$x < -2$: $- - - - -$ | -2 | $x > -2$: $- - - - - -$ ⟶ $f''(x) = -12(x+2)^2$

تحدب | تحدب

f محدب في $\{x \mid x < -2\}, \{x \mid x > -2\}$ لاتوجد نقطة انقلاب

$x = -2$ (مرشح فقط)

$f(-2) = 4 - (-2+2)^2 = 4 - 0 = 4 \;, (-2, 4)$ نقطة مرشح فقط

---

⑪ $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 1}$

$f'(x) = \dfrac{(x+1)(3) - (3x-1)(1)}{(x+1)^2} = \dfrac{3x + 3 - 3x + 1}{(x+1)^2} = \dfrac{4}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 4(x+1)^{-2} \Rightarrow f''(x) = -8(x+1)^{-3} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{-8}{(x+1)^3} \quad , f''(x) = 0$

(سابقه)

$\dfrac{-8}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow -8 = 0$ غير ممكن

∴ لاتوجد نقاط انقلاب

نقوم بإيجاد مناطق التقعر والتحدب فقط وذلك بأن نأخذ المقام ونجعله = صفر ونجد قيم x (مجموعة) ونختبرها على خط الاعداد في $f''(x)$

$(x+1)^3 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ مجموعة

المقام ... بالجذر

$x < -1$: $+ + + +$ | -1 (مجموعة) | $x > -1$: $- - -$ ⟶ $f''(x) = \dfrac{-8}{(x+1)^3}$

تقعر | تحدب

f مقعر في $\{x \mid x < -1\}$

* دوال الدرجة الثانية ومجموع المربعين (بعد الاشتقاق مرتين)

⑤ $f(x)=8x^2+2x$

$f'(x)=16x+2$

$f''(x)=16 \quad , f''(x)=0 \Rightarrow 16=0$ غير ممكن

∴ الدالة لا تمتلك نقطة انقلاب والدالة مقعرة في R

---

⑥ $f(x)=2-2x-x^2$

$f'(x)=-2-2x \Rightarrow f''(x)=-2 \quad , f''(x)=0$

$-2=0$ غير ممكن

∴ الدالة لا تمتلك نقطة انقلاب والدالة محدبة في R

---

⑦ $f(x)=x^4+6x^2$

$f'(x)=4x^3+12x$

$f''(x)=12x^2+12 \quad , f''(x)=0$

$12x^2+12=0$ مجموع مربعين

توضيح

$12x^2+12=0]\div 12$

$x^2+1=0$

$x^2=1$

$x=\pm\sqrt{-1} \notin R$

∴ الدالة لا تمتلك نقاط انقلاب والدالة مقعرة في R

---

* ايجاد معادلة المماس $y-y_1=m(x-x_1)$

لايجاد معادلة مماس نحتاج ① نقطة (x,y) ② وميل

لايجاد الميل نشتق الدالة مشتقة اولى ثم نعوض قيمة x فيها.

س/ جد معادلة المماس للمنحني $f(x)=x^3-3x^2+4$ عند نقطة الانقلاب

$f'(x)=3x^2-6x \Rightarrow f''(x)=6x-6 \quad , f''(x)=0$

$6x-6=0]\div 6 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$ مرشحه

$x<1$ $- - - -$ 1 $+ + + +$ $x>1$ $f''(x)=6x-6$

محدب   تقعر

$x=1$ (انقلاب) $\Rightarrow f(1)=3(1)^2-6=3-6=-3 \; , \; (1,-3)$ نقطة انقلاب

نجد الميل

$f'(x)=3x^2-6x \Rightarrow f'(1)=3(1)^2-6(1)=3-6=-3$ الميل

∴ توفرت نقطة $(\overset{x_1}{1},\overset{y_1}{2})$ وميل $m=-3$

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-2=-3(x-1) \Rightarrow y-2=-3x+3$

$y-2+3x-3=0 \Rightarrow 3x+y-5=0$ معادلة المماس عند نقطة الانقلاب

* مسائل حول ايجاد قيم الثوابت

ملاحظة: قبل البدء بحل الاسئلة التي تحتوي على الثوابت نأخذ بعض المفاهيم التي تفيدنا في حلها .

مثلاً لو كانت الدالة $f(x)=ax^3+bx^2$ ماذا تعني كلاً من

① $f'(1)=0$ ② $f''(-1)=0$ ③ $f(2)=5$ ④ $(1,2)$ تحقق الدالة

① $f'(1)=0$ نشتق الدالة مشتقة اولى ونعوض مكان x واحد ونساويها بالصفر

$$f'(x)=3ax^2+2bx$$
$$f'(1)=3a(1)^2+2b(1)$$
$$f'(1)=3a+2b \Rightarrow 3a+2b=0$$

② $f''(-1)=0$ نشتق الدالة مشتقة ثانية ونعوض مكان $x=-1$ ونساويها بالصفر

$$f''(x)=6ax+2b$$
$$f''(-1)=6a(-1)+2b$$
$$f''(-1)=-6a+2b \Rightarrow -6a+2b=0$$

③ $f(2)=5$ نعوض مكان كل $x=2$ بالدالة الاصلية ونساويها بالعدد 5

$$f(2)=a(2)^3+b(2)^2$$
$$f(2)=8a+4b \Rightarrow 8a+4b=5$$

④ $(\overset{x}{1},\overset{y}{2})$ تحقق الدالة بأن نعوض مكان $f(x)=2$ ومكان كل $x=1$

$$\underbrace{f(x)}_{y}=ax^3+bx^2$$
$$2=a(1)^3+b(1)^2 \Rightarrow a+b=2$$

* ملاحظات حول مسائل ايجاد قيم الثوابت .

① حول النقطه الحرجه او العظمى او الصغرى مثلاً (2,5) تحقق الداله الاصليه ، $\acute{f}(2)=0$

② اذا كانت للداله نهايه عظمى او صغرى او حرجه عند مثلاً $x=5 \longrightarrow \acute{f}(5)=0$

③ اذا كانت الداله مثلاً متزايده في $\{x : x>3\}$ ، متناقصه في $\{x : x<3\}$ $\longrightarrow \acute{f}(3)=0$

④ حول نقطة تماس (منحني مع منحني او منحني مع مستقيم) مثلاً (3,5) تحقق الداله الاصليه ، $\acute{f}(3)=\acute{f}(3)$ للداله الثانيه (ميل) للداله الاولى (مشتقه)

⑤ اذا كانت للداله نهايه عظمى او صغرى قيمتها مثلاً 5 هذا يعني اعطاء الاحداثي الصادي للنقطه (x , 5) اي اعطاء y ولكي نجد قيمة $x \longleftarrow \acute{f}(x)=0$ اي نجد قيمة x بالمشتقه الاولى بعد ان نساويها بالصفر والاختبار هو الذي يحدد اي من قيم x نأخذها في الحل.
ثم نعوض النقطه في الداله الاصليه لانها تحقق لكي نجد الثابت .

ملاحظه :- يجب ان تكون الداله بعد الاشتقاق خاليه من الثوابت لكي نجد قيم x

⑥ عند وجود نقطة ولتكن مثلاً (4 , -1) وكان للداله ميل مماس عند النقطه وليكن مثلاً يساوي (1) $\longrightarrow \acute{f}(-1)=1$

* بالنسبه الى نقاط الانقلاب او مناطق التقعر والتحدب نفس الخطوات السابقه كحل لكن للمشتقه الثانيه

ملاحظات

① تكون عدد المعادلات بقدر عدد الثوابت في السؤال .

② المعادلات الناتجه تكون خاليه من x , y وتحتوي على الثوابت فقط .

③ عظمى ، صغرى ، حرجه ، تزايد ، تناقص $\longrightarrow \acute{f}(x)$

④ تقعر ، تحدب ، انقلاب $\longrightarrow \acute{\acute{f}}(x)$

س/ اذا كانت $(2,6)$ نقطة حرجة لمنحني الدالة $f(x)=a-(x-b)^4$ جد قيمة $a,b\in R$ ثم بين نوع النقطة الحرجة.

$(2,6)$ حرجة

تحقق الدالة الاصلية.

$f(x)=a-(x-b)^4$

$6=a-(2-2)^4$ عوضنا تحقق

$6=a-0$

$\therefore a=6$

$f'(2)=0$

$f'(x)=0-4(x-b)^3\cdot(1)$

$f'(2)=-4(2-b)^3$

$-4(2-b)^3=0\ ]\div(-4)$

$(2-b)^3=0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} 2-b=0$

$\therefore b=2$

الى هنا ينتهي الحل بايجاد قيم الثوابت واذا كان هناك مطلب آخر نقوم بتعويض الثوابت بالداله الاصليه ثم نجد المطلب الاخر

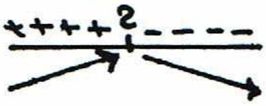
$f(x)=6-(x-2)^4$

لبيان نوع النقطة الحرجة

$f'(x)=0-4(x-2)^3\cdot(1)\ ,\ f'(x)=0$

$-4(x-2)^3=0\ ]\div(-4)\Longrightarrow(x-2)^3=0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x-2=0$

$\therefore x=2$ (حرجة)



من خلال الاختبار فأن $(2,6)$ نقطة نهاية عظمى

س/ اذا كان لمنحني الدالة $f(x)=ax^3+bx^2$ نقطة انقلاب $(1,2)$ جد $a,b\in R$.

$(1,2)$ انقلاب

تحقق الدالة الاصلية

$f(x)=ax^3+bx^2$

$2=a(1)^3+b(1)^2$

$2=a+b$

$a+b=2 \ldots\ldots (2)$

$f''(1)=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx$

$f''(x)=6ax+2b$

$f''(1)=6a+2b\Rightarrow 6a+2b=0]\div 2$

$3a+b=0\ldots\ldots (1)$

$\mp a\mp b=\mp 2\ldots\ldots (2)$

بالطرح

$2a=-2\Rightarrow a=-1$ نعوض قيمة a في (2) $\Rightarrow -1+b=2\Rightarrow b=3$

س/ عين قيمتي الثابتتين a, b لكي يكون لمنحني الدالة $y = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند $x=-1$ ونهاية صغرى محلية عند $x=2$ ثم جد نقطة انقلابه.

للدالة نهاية صغرى عند $x=2$ $\longrightarrow f'(2)=0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(2) = 3(2)^2 + 2a(2) + b$

$f'(2) = 12 + 4a + b$

$12 + 4a + b = 0$

$4a + b = -12 \;\cdots\cdots (2)$

للدالة نهاية عظمى عند $x=-1$ $\longrightarrow f'(-1)=0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(-1) = 3(-1)^2 + 2a(-1) + b$

$f'(-1) = 3 - 2a + b$

$3 - 2a + b = 0$

$-2a + b = -3 \;\cdots\cdots (1)$

$\mp 4a \mp b = \pm 12 \;\cdots\cdots (2)$

بالطرح

$-6a = 9$

$a = \frac{9}{-6} \Rightarrow a = \frac{-3}{2}$

نعوض قيمة a في معادلة (1)

$-2\left(\frac{-3}{2}\right) + b = -3 \Rightarrow 3 + b = -3 \Rightarrow b = -6$

ولبيان نقطة الانقلاب نعوض قيم الثوابت بالدالة الاصلية

$\therefore y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$

$y' = 3x^2 - 3x - 6$

$y'' = 6x - 3 \;,\; y'' = 0 \Rightarrow 6x - 3 = 0 \,]\div 3$

$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ (مرشحة)

$x < \frac{1}{2}$: - - - - - $\frac{1}{2}$ + + + + + : $x > \frac{1}{2}$ ، $f''(x) = 6x - 3$

محدب (عند $x < \frac{1}{2}$) ، مقعر (عند $x > \frac{1}{2}$)

f مقعرة $\{x : x > \frac{1}{2}\}$

f محدبة $\{x : x < \frac{1}{2}\}$

$x = \frac{1}{2}$ (انقلاب)

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{8} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right) - 3 =$

$= \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - 3 = \frac{1 - 3 - 24}{8} = \frac{-26}{8} = \frac{-13}{4}$

$\therefore \left(\frac{1}{2}, \frac{-13}{4}\right)$ نقطة انقلاب

س/ اذا كان $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ وكانت f مقعرة $\forall x>1$ ومحدبة $\forall x<1$ وكان للدالة f نقطة نهاية عظمى محلية هي $(-1,5)$ جد الثوابت $a,b,c\in R$.

عظمى $(-1,5)$

تحقق الدالة الاصلية:

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$

$5=a(-1)^3+b(-1)^2+c(-1)$

$5=-a+b-c$

$-a+b-c=5$ ---- ③

$f'(-1)=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(-1)=3a(-1)^2+2b(-1)+c$

$f'(-1)=3a-2b+c$

$3a-2b+c=0$ ..... ②

$-a+b-c=5$ .... ①

بالجمع

$2a-b=5$ ---- ④

$3a+b=0$ ----- ①

بالجمع

$5a=5$

مقعرة $x>1$ ، محدبة $x<1$ $\Leftarrow$ $f''(1)=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f''(x)=6ax+2b$

$f''(1)=6a+2b$

$6a+2b=0]\div 2$

$3a+b=0$ ---- ①

$a=1$ نعوض قيمة a في معادلة ①

نعوض قيمتي a, b في معادلة ③

$3(1)+b=0 \Rightarrow b=-3$

$-1-3-c=5 \Rightarrow -4-5=c \Rightarrow c=-9$

س/ (وزاري) لتكن $f(x)=x^3+ax^2+bx$ جد قيمة $a,b\in R$ اذا علمت أن للدالة نقطة نهاية صغرى محلية عند $x=4$ ونقطة انقلاب عند $x=1$

$[a=-3 , b=-24]$ =ج.

س/ اذا كانت $f(x)=ax^3+bx^2-9x$ وكانت $f'(3)=0$ ، $f(-1)=5$ جد قيمة كلاً من $a,b\in R$

$[a=1 , b=-3]$ =ج.

س3/ اذا كان للدالة $f(x)=ax^3+bx^2-9x+c$ نهاية صغرى محلية عند $x=3$ ونقطة انقلاب هي $(1,-4)$ جد $a,b,c\in R$

$[a=1, b=-3, c=7]$ =ج.

س/ اذا كان منحني الدالة $f(x)=ax^3+bx^2+c$ ، مقعر في $\{x: x<1\}$ ومحدب في $\{x: x>1\}$ ويمس المستقيم $y+9x=28$ عند النقطة $(3,1)$ جد $a,b,c\in R$.

نقطة تماس $(3,1)$ ← تحقق الدالة الاصلية

$f'(3) = f'(3)$
للدالة الاولى ، للدالة الثانية

$x<1$ مقعر ، $x>1$ محدب $\Rightarrow f''(1)=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx$

$f''(x)=6ax+2b$

$f''(1)=6a(1)+2b$

$6a+2b=0$ ----- ①

$f'(x)=3ax^2+2bx$

$f'(3)=3a(3)^2+2b(3)$

$f'(3)=27a+6b$

$y+9x=28$

$y=28-9x$ نحول y وحدها في جهة

$f'(x)=-9 \Rightarrow f'(3)=-9$

$\therefore [27a+6b=-9]\div 3$

$9a+2b=-3$ ----- ②

بالطرح

$\mp 9a \mp 2b = \pm 3$ ----- ②

$-3a=3$

$a=-1$ نعوض قيمة a في معادلة ①

$6(-1)+2b=0 \Rightarrow -6+2b=0 \Rightarrow 2b=6 \Rightarrow b=3$

تحقق الدالة الاصلية $\overset{x}{3},\overset{y}{1}$ $(3,1)$

نعوض القيمتين $a=-1$ ، $b=3$ ايضاً

$f(x)=ax^3+bx^2+c$

$1=-1(3)^3+3(3)^2+c$

$1=-27+27+c$

$\therefore c=1$

س) المستقيم $3x-y=7$ يمس المنحني $y=ax^2+bx+c$ عند $(2,-1)$ وكانت له نهاية محلية عند $x=\frac{1}{2}$ جد قيمة $a,b,c\in R$ وما نوع النهاية.

نقطة تماس $(2,-1)$ ← تحقق الدالة الاصلية

$\acute{f}(2)=\acute{f}(2)$

للدالة الاولى:

$\acute{f}(x)=2ax+b$

$\acute{f}(2)=2a(2)+b$

$\acute{f}(2)=4a+b$

للدالة الثانية:

$3x-y=7$

$3x-7=y$

$\acute{f}(x)=3 \Rightarrow \acute{f}(2)=3$

للدالة نهاية عند $x=\frac{1}{2}$

$\acute{f}(\frac{1}{2})=0$

$\acute{f}(x)=2ax+b$

$\acute{f}(\frac{1}{2})=2a(\frac{1}{2})+b$

$\acute{f}(\frac{1}{2})=a+b$

$a+b=0$ ------ ①

$\therefore 4a+b=3$ ------ ②

$\mp a \mp b=0$ ------ ① بالطرح

$3a=3$

$a=1$ نعوض قيمة a في معادلة ①

$\therefore 1+b=0 \Rightarrow b=-1$

تحقق الدالة الاصلية $(\overset{x}{2},\overset{y}{-1})$

نعوض القيمتين $a=1$, $b=-1$ ايضاً

$f(x)=ax^2+bx+c$

$-1=(1)(2)^2+(-1)(2)+c$

$-1=4-2+c \Rightarrow -1=2+c \Rightarrow c=-3$

ولبيان نوع النهاية نعوض الثوابت في الدالة الاصلية

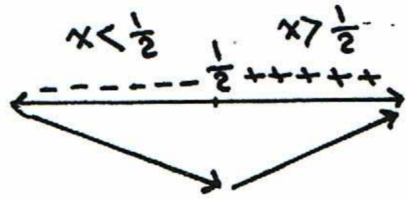
$y=(1)x^2+(-1)x-3$

$y=x^2-x-3$

$\acute{y}=2x-1$, $\acute{y}=0$

$2x-1=0 \Rightarrow 2x=1$

$x=\frac{1}{2}$ حرجة



$\therefore x=\frac{1}{2}$ نهاية صغرى محلية.

س/ اذا كان $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ ، $g(x)=1-12x$ وكان كل من f , g متماسان عند نقطة انقلاب المنحني f وهي $(1,-11)$ جد قيم الثوابت $a,b,c\in R$

نقطة انقلاب $(1,-11)$ ← $f''(1)=0$ ، تحقق الدالة الاصلية

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f''(x)=6ax+2b$

$f''(1)=6a(1)+2b$

$6a+2b=0\,]\div 2$

$3a+b=0$ ......(1)

نقطة تماس $(1,-11)$ ← $f'(1)=g'(1)$ ، تحقق الدوال الاصلية

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(1)=3a(1)^2+2b(1)+c$

$f'(1)=3a+2b+c$

$g(x)=1-12x$

$g'(x)=-12$

$g'(1)=-12$

$\therefore 3a+2b+c=-12$ ......(2)

تحقق الدالة الاصلية $(1,-11)$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$

$-11=a(1)^3+b(1)^2+c(1)$

$-11=a+b+c$

$\therefore a+b+c=-11$ ......(3)

$\mp 3a \mp 2b \mp c=\pm 12$ ......(2) بالطرح

$-2a-b=1$ ......(4)

$3a+b=0$ ......(1) بالجمع

$a=1$ نعوض قيمة a في معادلة (1)

$3(1)+b=0 \Rightarrow b=-3$ نعوض قيمتي a,b في معادلة (3)

$1-3+c=-11$

$-2+c=-11$

$c=-11+2$

$c=-9$

س/ لتكن $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ دالة فجد قيمة a علماً أن الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x=1$ ثم بين أن الدالة لا تمتلك نهاية عظمى محلية .

للدالة نقطة انقلاب عند $x=1 \longrightarrow f''(1)=0$

$f(x)=x^2+ax^{-1}$

$f'(x)=2x-ax^{-2}$

$f''(x)=2+2ax^{-3}$

$f''(1)=2+2a(1)^{-3}$

$2+2a(1)=0 \Rightarrow 2+2a=0] \div 2 \Rightarrow 1+a=0 \Rightarrow a=-1$

لبيان أن الدالة لا تمتلك نهاية نعوض قيمة a في الدالة الاصلية

$f(x)=x^2+(-1)x^{-1} \Rightarrow f(x)=x^2-x^{-1}$

$f'(x)=2x+x^{-2}$

نقوم باستخدام المشتقة الثانية لمعرفة النهاية راجع ص55

$f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}$, $f'(x)=0$

$2x+\frac{1}{x^2}=0] \times x^2$

$2x^3+1=0 \Rightarrow 2x^3=-1 \Rightarrow x^3=\frac{-1}{2} \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$

$f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=2x+x^{-2}$

$f''(x)=2-2x^{-3}$

$f''(x)=2-\frac{2}{x^3}$ نعوض قيمة x الحرجة في المشتقة الثانية

$f''(\sqrt[3]{\frac{-1}{2}})=2-\frac{2}{\frac{-1}{2}}=2+2(2)$

$=2+4=6$ الناتج عدد موجب

∴ الدالة لا تمتلك نهاية عظمى

س/ اذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $f(x)=3x^2-x^3+c$ جد قيمة $c\in R$ ثم جد معادلة مماس المنحني في نقطة انقلابه.

$f'(x)=6x-3x^2 , f'(x)=0$ راجع ص 62 ملاحظة 5

اذا لم يذكر عند $x=?$ ويذكر في السؤال عدد فقط

$6x-3x^2=0]\div 3$

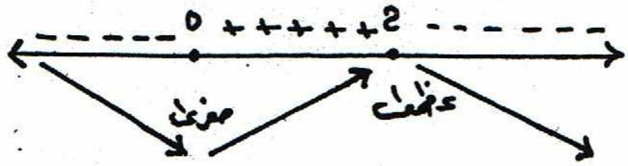
∴ تكون نقطة النهاية الصغرى $(\overset{?}{x},6) \longleftarrow f'(x)=0$

$2x-x^2=0$

اي نجد قيمة x بالمشتقة الاولى بعد أن نساويها بالصفر والاختبار هو الذي يحدد اي قيم من x نأخذها في الحل

$x(2-x)=0$

$x=0$ ، $x=2$ قيم حرجة



∴ $(\overset{x}{0},\overset{y}{6})$ نقطة نهاية صغرى

وهذه النقطة تحقق الدالة الاصلية

$f(x)=3x^2-x^3+c \Rightarrow 6=0-0+c \Rightarrow c=6$

ولايجاد معادلة المماس نعوض قيمة c بالدالة الاصلية راجع ص 60.

$f(x)=3x^2-x^3+6$

نجد نقطة الانقلاب

$f'(x)=6x-3x^2$

$f''(x)=6-6x , f''(x)=0$

$6-6x=0]\div 6 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$ (مرشحة) ++++ 1 ---- $f''(x)=6-6x$ مقعر ، محدب

∴ $x=1$ (انقلاب)

$f(1)=3(1)^2-(1)^3+6 \Rightarrow 3-1+6=8$ ∴ $(1,8)$ نقطة انقلاب

نجد الميل

لايجاد الميل نعوض قيمة x للنقطة في المشتقة الاولى

$f'(x)=6x-3x^2 \Rightarrow f'(1)=6(1)-3(1)^2=6-3=3$ الميل

∴ توفر الميل ونقطة $(\overset{x}{1},\overset{y}{8}) , m=3$

$y-y_1=m(x-x_1)$

معادلة المماس $y-8=3(x-1) \Rightarrow y-8=3x-3 \Rightarrow 3x-y+5=0$

س/ اذا كان للدالة $f(x)=ax^3+3x^2+c$ نهاية عظمى محلية تساوي 8 ونقطة انقلاب عند $x=1$ جد قيمة $a, c \in R$

للدالة نقطة انقلاب عند $x=1 \longrightarrow f''(1)=0$

$f'(x)=3ax^2+6x$

$f''(x)=6ax+6$

$f''(1)=6a(1)+6$

$6a+6=0\ ]\div 6$

$a+1=0 \Rightarrow a=-1$

نقطة النهاية العظمى تكون $(x,8) \longrightarrow f'(x)=0$
نتبع خطوات حل السؤال السابق

$f(x)=-x^3+3x^2+c$

عوضنا قيمة a بالدالة الاصلية

$f'(x)=-3x^2+6x\ ,\ f'(x)=0$

$-3x^2+6x=0$

$6x-3x^2=0\ ]\div 3$

$2x-x^2=0$

$x(2-x)=0$

$x=0$, $x=2$ قيم x الحرجة

$f'(x)=-3x^2+6x$: ------ 0 ++++++ 2 ------

صغرى (عند 0) ، عظمى (عند 2)

$\therefore (2,8)$ نقطة نهاية عظمى محلية

تحقق الدالة الاصلية

$f(x)=-x^3+3x^2+c$

$8=-(2)^3+3(2)^2+c$

$8=-8+12+c$

$8=4+c$

$\therefore c=4$

س/ لتكن $f(x)=ax^2-6x+b$ حيث $a \in \{-4, 8\}$ ، $b \in R$ جد قيمة a اذا كانت ① الدالة f محدبة ② الدالة f مقعرة ③ الدالة f نهاية عظمى ④ للدالة f نهاية صغرى

* بما أن في السؤال قد أعطى أن $a \in \{-4, 8\}$
∴ قيم a تكون أما -4 أو 8 حسب المطلوب في السؤال.

$f'(x) = 2ax - 6$

$f''(x) = 2a$

① متى تكون الدالة محدبة
تكون ذلك عندما $f''(x) < 0$
$\therefore 2a < 0$
$a < 0$
$a = -4$

② متى تكون الدالة مقعرة
تكون ذلك عندما $f''(x) > 0$
$\therefore 2a > 0$
$a > 0$
$\therefore a = 8$

③ متى تكون للدالة نهاية عظمى
حسب استخدام المشتقة الثانية لمعرفة النهاية
عندما تكون $f''(x) < 0$
$\therefore 2a < 0$
$a < 0$
$a = -4$

④ متى تكون للدالة نهاية صغرى
حسب استخدام المشتقة الثانية لمعرفة النهاية
عندما تكون $f''(x) > 0$
$\therefore 2a > 0$
$a > 0$
$a = 8$

واجب

س/ اذا كانت الدالة $f(x) = ax^3 + bx^2 + 9x + 2$ ، متناقصة $\forall x < 3$ ومتزايدة $\forall x > 3$ والدالة محدبة $\forall x < 2$ ومقعرة $\forall x > 2$ جد $a, b \in R$ ، $[a=1, b=-6]$ ج.

س/ اذا كان المنحني $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ يمس المستقيم $3x - y + 5 = 0$ عند النقطة $(1, 2)$ ويكون له نهاية عظمى عند النقطة $(-2, 11)$ ، اوجد معادلة المنحني ثم اثبت ان هناك نقطة نهاية صغرى
$[a=1, b=2, c=-4, d=3]$ ج.

س/ اذا كان للمنحني $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ نقطة نهاية صغرى $(2, -5)$ والمستقيم $y - 9x + 28 = 0$ مماساً للمنحني عند النقطة $(3, -1)$ ، اوجد قيمة كل من $a, b, c, d \in R$
$[a=1, b=-3, c=0, d=-1]$ ج.

س١ اذا كان لمنحني الدالة $f(x)=ax^4+bx^3-12x^2+c$ نقطتي نهاية صغرى عندما $x=-2$ ، $x=1$ ونقطة نهاية عظمى $(0,7)$ اوجد قيمة $a,b,c\in R$

[$a=3, b=4, c=7$]=ج.

س٢ اذا كان لمنحني الدالة $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ نقطة انقلاب $(3,1)$ وميل المماس للمنحني عند نقطة الانقلاب يساوي (-12) اوجد قيمة الثوابت $a,b,c\in R$

[$a=-9, b=15, c=10$]=ج

س٣ جد معادلة المنحني للدالة $y=ax^3+bx^2+cx$ اذا كان للمنحني نقطة انقلاب عند $(1,2)$ وميل المنحني عند هذه النقطة $=-1$

[$f(x)=3x^3-9x^2+8x$]=ج.

س٤ اذا علمت أن لمنحني الدالة $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ نقطة حرجة تنتمي لمحور الصادات وكانت $(1,2)$ نقطة انقلاب للدالة جد $a,b,c\in R$

[$a=-1, b=3, c=0$]=ج.

س٥ اذا كان المستقيم $3x+y+k=0$ مماساً للمنحني $f(x)=bx^3-cx^2+6$ عند النقطة التي عندها $x=1$ وكانت للمنحني نهاية صغرى محلية عند $x=2$ جد قيمة $b,c,k\in R$

[$b=1, c=3, K=-7$]=ج.

اسئلة وزارية

س١ $\frac{97}{1}$ الدالة $f(x)=3+bx+cx^2$ تمتلك نقطة حرجة $(1,4)$ جد $b,c\in R$ ثم بين نوع النقطة الحرجة

[$c=-1, b=2$ ، $(1,4)$ عظمى]=ج.

س٢ $\frac{98}{1}$ $(1,6)$ نهاية صغرى محلية للدالة $f(x)=ax^2+(x-b)^2$ جد $a,b\in R$ ، [$a=2, b=3$]=ج.

س٣ $\frac{99}{2}$ اذا كان منحني الدالة $f(x)=x^3-bx^2+cx$ يمر بالنقطة $(-2,-2)$ وكان للدالة نقطة انقلاب عند $x=1$ جد قيمة $c,b\in R$ ثم جد نقطة النهاية العظمى

[$c=-9, b=3$ ، $(-1,5)$ عظمى]=ج.

س٤ $\frac{2000}{2}$ اذا كان منحني الدالة $f(x)=ax^3+bx^2+1$ ، وكانت الدالة مقعرة $\forall x<1$ ومحدبة $\forall x>1$ ويمس المستقيم $y+9x=28$ عند $x=3$ جد $a,b\in R$

[$a=-1, b=3$]=ج.

س٥ $\frac{2001}{2}$ اذا كان $f(x)=x^3+bx^2+cx$ جد قيمة $c,b\in R$ اذا علمت أن للدالة نهاية صغرى محلية عند $x=4$ ونهاية عظمى عند $x=-2$

[$b=-3, c=-24$]=ج.

س٦ $\frac{2004}{2}$ جد معادلة المنحني $f(x)=ax^3-bx^2+cx$ حيث $(-1,4)$ نقطة انقلاب له وميل المماس عندها يساوي (-1).

[$a=-3, b=9, c=-10, f(x)=-3x^3-9x^2-10x$

س٧ $\frac{2005}{1}$ لتكن $f(x)=x^3+bx^2+cx+1$ ، $(-1,2)$ نقطة نهاية عظمى محلية للدالة f جد $b,c\in R$ هل توجد نقطة انقلاب برهن ذلك

[$b=1, c=-1, (\frac{-1}{3}, \frac{38}{27})$]=ج.

س٨ $\frac{2007}{2}$ جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تمثل نهاية عظمى محلية للدالة $f(x)=x^3-3x^2+2$ ورأسه نقطة الاصل

[$x^2=8y$ معادلة قطع مكافئ]=ج.

س9 $\frac{2008}{2}$ لتكن $f(x)=x^3+ax^2+bx$ للدالة نهاية صغرى محلية عند $x=4$ ونقطة انقلاب عند $x=1$ جد قيمة $a,b\in R$. ج= $[a=-3 , b=-24]$

س10 $\frac{2009}{1}$ اذا كانت $f(x)=ax^2-(x+b)^2$ والنقطة $(1,-2)$ حرجة جد قيمة $a,b\in R$ الموجبتين ثم بين نوع النقطة الحرجة . ج= $[a=-1 , b=3 , (1,-2)$ صغرى$]$

س11 $\frac{2009}{2}$ اذا كان المستقيم $y+9x=28$ مماس للدالة $f(x)=ax^3+bx^2+1$ عند النقطة $(3,1)$ جد $a,b\in R$. ج= $[a=-1 , b=3]$

س12 2012 2013 المنحني $y=x^3+ax^2+bx$ نهاية عظمى محلية عند $x=-1$ ونهاية صغرى محلية عند $x=2$ جد $a,b\in R$. ج= $[a=\frac{-3}{2} , b=-6]$

س13 $\frac{2013}{1}$ لتكن $f(x)=x^2-\frac{a}{x}$ برهن أن الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى لكل $a\in R$ حيث $x=0$. ج= $[f''(\frac{-a}{2})=6]$

س14 $\frac{2014}{1}$ اذا كان منحني الدالة $f(x)=ax^3+bx^2+c$ ، مقعر في $\{x: x<1\}$ ومحدب في $\{x: x>1\}$ ويمس المستقيم $y+9x=28$ عند النقطة $(3,1)$ جد $a,b,c\in R$. ج= $[a=-1 , b=3 , c=1]$

س15 $\frac{2014}{2}$ اذا كانت $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, $g(x)=1-12x$ وكان كل من f و g متماسان عند نقطة انقلاب المنحني f وهي $(1,-11)$ جد $a,b,c\in R$. ج= $[a=1 , b=-3 , c=-9]$

س16 $\frac{2014}{3}$ جد معادلة المنحني $f(x)=ax^3-bx^2+cx$ حيث النقطة $(-1,14)$ نقطة انقلاب له وميل المماس عندها يساوي (1) .

س17 $\frac{2015}{1}$ اذا كانت $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ وكانت f مقعرة $\forall x>1$ ومحدبة $\forall x<1$ وللدالة f نقطة نهاية عظمى محلية هي $(-1,5)$ جد $a,b,c\in R$. ج= $[a=1 , b=-3 , c=-9]$

س18 $\frac{2015}{2}$ اذا كانت $f(x)=ax^3+3x^2+c$ دالة وكان للدالة نهاية عظمى محلية تساوي 8 ونقطة انقلاب عند $x=1$ جد $a,b\in R$. ج= $[a=-1 , c=4]$

Graphing Function رسم المخطط البياني للدالة

ولكي نرسم المخطط البياني لدالة معطاة نتبع الخطوات الآتية :

اولاً اوسع مجال للدالة

① اذا كانت الدالة غير كسرية وغير جذرية يكون اوسع مجال للدالة هو R .

② اذا كانت الدالة كسرية نقوم بجعل المقام = صفر اي انه امكننا نجد قيم x فيكون اوسع مجال للدالة هو $R - \{$ قيم x التي تجعل المقام = صفر $\}$

* ملاحظة اذا كان الكسر في مقامه مجموع مربعين فأن اوسع مجال للدالة هو R

س/ جد اوسع مجال للدوال الآتية .

① $f(x) = x^2 - 4x + 3$ اوسع مجال للدالة هو R

② $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x + 5$ اوسع مجال للدالة هو R

③ $f(x) = \frac{5}{x^2+4}$ اوسع مجال للدالة هو R لان المقام مجموع مربعين

④ $f(x) = \frac{2}{x+1} \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$ ∴ اوسع مجال $R - \{-1\}$

نجعل المقام = صفر

ثانياً نقاط التقاطع مع المحورين

① لايجاد نقاط التقاطع مع محور السينات نجعل $f(x)=0$ ونجد قيم x فتكون النقطة $(x,0)$

② لايجاد نقاط التقاطع مع محور الصادات نجعل $x=0$ ونجد قيم $f(x)$ فتكون النقطة $(0,y)$

س/ جد نقاط التقاطع مع المحورين (أن وجدت) لكل من الدوال الآتية .

① $\underbrace{f(x)}_{y} = x^2 + 4x + 3$

$x = 0$

$f(0) = (0)^2 + 4(0) + 3$

$= 0 + 0 + 3 = 3$

$(0, 3)$

نقطة التقاطع مع محور الصادات

$y = 0$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$(x+3)(x+1) = 0$

$x = -3 \,,\, x = -1$

$(-3, 0) \,,\, (-1, 0)$

نقاط التقاطع مع محور السينات

② $f(x)=\frac{6}{x^2+3}$

$x=0$

$f(0)=\frac{6}{0+3}=\frac{6}{3}=2$

$(0,2)$ نقطة التقاطع مع محور الصادات

$y=0$

$\frac{6}{x^2+3}=0 \Rightarrow 6\neq 0$

لا توجد نقاط تقاطع مع محور السينات

③ $f(x)=\frac{1}{x}$

$x=0$

$f(0)=\frac{1}{0}$ كمية غير معرفة

$y=0$

$\frac{1}{x}=0 \Rightarrow 1\neq 0$

لا توجد نقاط تقاطع مع محور السينات ولا مع محور الصادات

ثالثاً التناظر

$\forall x\in R , \exists (-x)\in R$

تكون الدالة ① متناظرة مع محور الصادات اذا كان $f(-x)=f(x)$

② متناظرة مع نقطة الاصل اذا كان $f(-x)=-f(x)$

* ملاحظة

① اذا كانت أسس x زوجية فالتناظر يكون حول المحور الصادي.
② اذا كانت أسس x فردية فالتناظر يكون مع نقطة الاصل.
③ اذا كانت أسس x مختلطة فردية وزوجية فلا يوجد تناظر.

* ملاحظة الحد الخالي من x يعتبر بعدد أسه زوجي

س/ جد التناظر لكل من الدوال الآتية

① $f(x)=x^4+5x^2$ (زوجي، زوجي)

$\forall x\in R , \exists (-x)\in R$

$f(-x)=(-x)^4+5(-x)^2=x^4+5x^2$

∴ المنحني متناظر مع محور الصادات لان $f(-x)=f(x)$ وغير متناظر مع نقطة الاصل

② $f(x)=x^3-2x$ (فردي، فردي)

$\forall x\in R , \exists (-x)\in R$

$f(-x)=(-x)^3-2(-x)=-x^3+2x$

∴ المنحني متناظر مع نقطة الاصل

③ $f(x) = x^3 - 4x + 7$ (فردي، فردي، زوجي)

$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) + 7 = -x^3 + 4x + 7$ ∴ لا يوجد تناظر مع الصادات ولا مع نقطة الاصل

④ $f(x) = \frac{1}{x}$

$\forall x \in R - \{0\}, \exists (-x) \in R - \{0\}$

$f(-x) = \frac{1}{-x}$

* اذا كانت الدالة $\frac{عدد}{x^n}$ ، n عدد فردي الدالة تكون متناظرة مع نقطة الاصل .

ملاحظة : طريقة اخرى لمعرفة الدالة متناظرة مع محور الصادات او نقطة الاصل حيث نقوم بتعويض بالدالة (1 ,1-) أو (2 ,2-) أو (3 ,3-) أو ....
فاذا كانت

① النتائج متساوية بالقيمة والاشارة فالدالة متناظرة مع محور الصادات .
② النتائج متساوية بالقيمة ومختلفة بالاشارة فالدالة متناظرة مع نقطة الاصل .
③ النتائج مختلفة فلا يوجد تناظر مع محور الصادات ولا مع نقطة الاصل .

Ex

① $f(x) = x^2 + 3$

$f(1) = (1)^2 + 3 = 1 + 3 = 4$

$f(-1) = (-1)^2 + 3 = 1 + 3 = 4$ الدالة متناظرة مع محور الصادات

② $f(x) = x^3 + 2x$

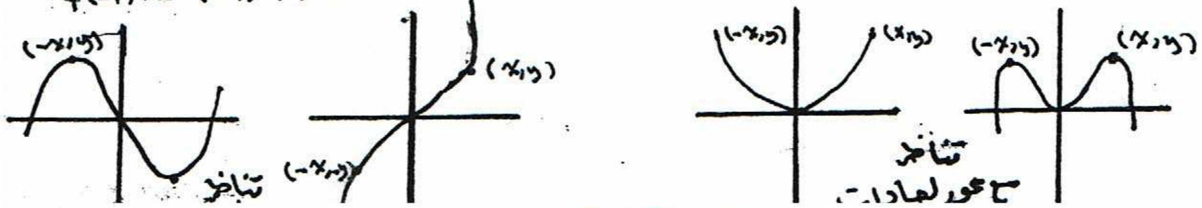
$f(1) = (1)^3 + 2(1) = 1 + 2 = 3$

$f(-1) = (-1)^3 + 2(-1) = -1 - 2 = -3$. الدالة متناظرة مع نقطة الاصل

③ $f(x) = x^3 + 3x + 4$

$f(1) = (1)^3 + 3(1) + 4 = 1 + 3 + 4 = 8$ لا يوجد تناظر مع محور الصادات ولا مع نقطة الاصل

$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1) + 4 = -1 - 3 + 4 = 0$



رابعاً المحاذيات (توجد في الدوال الكسرية فقط)

المستقيمات المحاذية نوعان .

① محاذي عمودي ويكون عمودياً على محور السينات وموازياً لمحور الصادات ولإيجاده نقوم بجعل المقام = صفر ونجد قيمة x أن أمكن .

② محاذي افقي ويكون عمودياً على محور الصادات وموازياً لمحور السينات ولإيجاده فأن $y = \frac{\text{معامل } x \text{ في البسط}}{\text{معامل } x \text{ في المقام}}$ (طريقة خاصة)

س/ جد المحاذيات لكلاً من الدوال الآتية .

① $f(x) = x^2 + 4x + 3$ لاتوجد محاذيات لانها دالة ليست نسبية

② $f(x) = \frac{4x+1}{2x-2}$

محاذي عمودي

$2x - 2 = 0 \,]\div 2$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

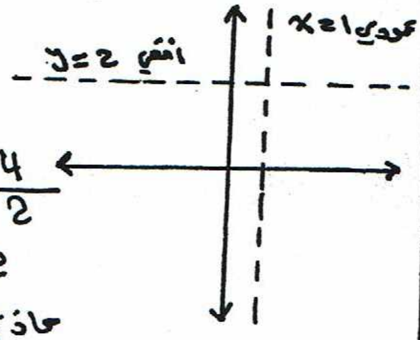
محاذي عمودي

محاذي افقي

$y = \frac{4}{2}$

$y = 2$

محاذي افقي



③ $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

محاذي عمودي

$x^2 + 1 \neq 0$

لانه مجموع مربعين

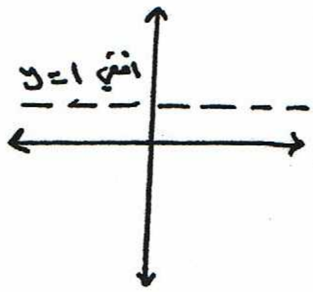
لايوجد محاذي عمودي

محاذي افقي

$y = \frac{1}{1}$

$y = 1$

محاذي افقي



④ $f(x) = \frac{4}{x+2}$

محاذي عمودي

$x + 2 = 0$

$x = -2$

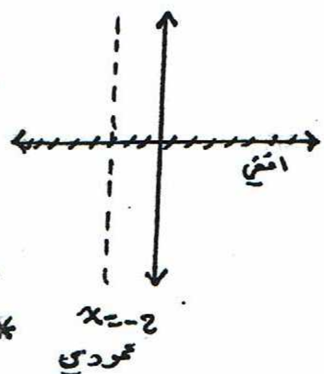
محاذي عمودي

محاذي افقي

$y = \frac{0}{1}$

$y = 0$

محاذي افقي



* ملاحظة : في الكسر اذا كان يحتوي على ثابت في البسط فأن المحاذي الافقي $y = 0$

طريقة ثانية لإيجاد المحاذي الافقي

⑤ $f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$

① نحول $f(x)$ الى y ونضرب وسطين x طرفين
② نجعل حدود x معاً ونستخرج عامل مشترك (x)
③ نجعل المقام = صفر ونجد قيمة y

محاذي افقي

$$\frac{y}{1}=\frac{3x-1}{x+1}$$

$$3x-1=yx+y$$

$$3x-yx=1+y$$

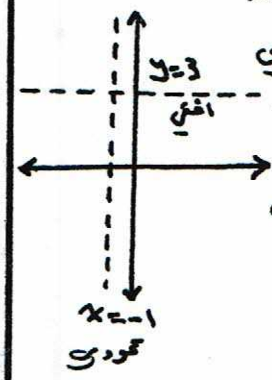
$$x(3-y)=1+y \Rightarrow x=\frac{1+y}{3-y}$$

$$3-y=0 \Rightarrow y=3$$ محاذي افقي .

محاذي عمودي

$$x+1=0$$

$$x=-1$$ محاذي عمودي



⑥ $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

محاذي افقي

$$\frac{y}{1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$x^2-1=yx^2+y$$

$$x^2-yx^2=1+y$$

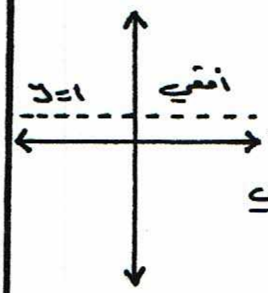
$$x^2(1-y)=1+y \Rightarrow x^2=\frac{1+y}{1-y}$$

$$1-y=0 \Rightarrow y=1$$ محاذي افقي

محاذي عمودي

$$x^2+1\neq 0$$

لانه مجموع مربعين
لا يوجد محاذي عمودي



خامساً النهايات العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص .

سادساً الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب .

سابعاً نقاط اضافية مساعدة عند الحاجة .

ثامناً الرسم .

س/ ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل منحني الدالة $f(x) = x^2+4x+3$

$f(x) = x^2+4x+3$

① اوسع مجال الدالة هو R .

② التقاطع مع المحورين

$x=0$

$f(0) = 0+0+3=3$

(0,3) مع محور الصادات

$y=0$

$x^2+4x+3=0 \Rightarrow (x+3)(x+1)=0$

$x=-3 , x=-1$

(-1,0) ، (-3,0) مع محور السينات

③ التناظر (الاسس مختلطة)

$\forall x \in R , \exists (-x) \in$ (المجال)

$f(-x) = (-x)^2+4(-x)+3 = x^2-4x+3$

لا يوجد تناظر مع الصادات ولا مع نقطة الاصل

لان $f(-x) \neq f(x) , f(-x) \neq -f(x)$

④ المحاذيات لا توجد محاذيات لانها دالة ليست كسرية .

⑤ النهايات ومناطقها .

$f'(x) = 2x+4 , f'(x)=0 \Rightarrow 2x+4=0] \div 2$

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$ حرجة

$x<-2$ ، -2 ، $x>-2$

- - - - - - - -2 + + + + + + $f'(x)=2x+4$

$x=-2$ (صغرى)

نجد نقطة النهاية وذلك بتعويض قيمة x بالدالة الاصلية

مناطق التزايد : $\{x : x>-2\}$

مناطق التناقص : $\{x : x<-2\}$

$f(-2) = (-2)^2+4(-2)+3 = 4-8+3=-1$

$(-2,-1)$ نقطة نهاية صغرى

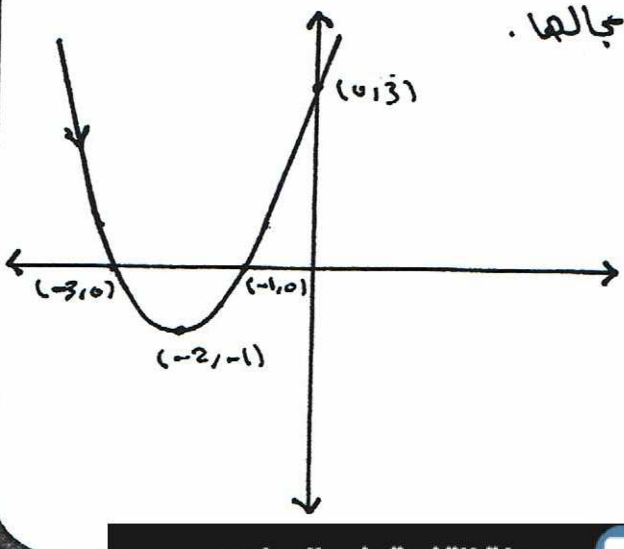
⑥ الانقلاب ومناطقها

$f''(x) = 2 , f''(x) \neq 0$

∴ لا توجد نقاط انقلاب والدالة مقعرة في مجالها .

⑦ نقاط مساعدة لا نحتاج لذلك .

⑧ الرسم



نقاط تقاطع
(0,3)
(-1,0)
(-3,0)

نهاية صغرى (-2,-1)

س٤ ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل منحني الدالة $f(x)=10-3x-x^2$

$f(x)=10-3x-x^2$

① مجال الدالة هو R .

② التقاطع مع المحورين

$x=0$

$f(0)=10-0-0=10$

$(0,10)$ مع محور الصادات

$y=0$

$10-3x-x^2=0]\ (-1)$

$x^2+3x-10=0$

$(x+5)(x-2)=0$

$x=-5\ ,\ x=2$

$(-5,0),(2,0)$ مع محور السينات .

③ التناظر (الاسس مختلطة)

$\forall x \in R\ ,\ \exists (-x) \in R$

$f(-x)=10-3(-x)-(-x)^2$

$=10+3x-x^2$

لا يوجد تناظر مع محور الصادات ولا مع نقطة الاصل

لان $f(-x) \neq f(x)\ ,\ f(-x) \neq -f(x)$

④ المحاذيات لا توجد محاذيات لان الدالة ليست كسرية .

⑤ النهايات ومناطقها

$f'(x)=-3-2x\ ,\ f'(x)=0$

$-3-2x=0 \Rightarrow -2x=3 \Rightarrow x=\frac{-3}{2}$ حرجة

$x<\frac{-3}{2}$: $+ + + + +$ ، $\frac{-3}{2}$ ، $x>\frac{-3}{2}$: $- - - - -$ ، $f'(x)=-3-2x$

مناطق التزايد $\{x : x<\frac{-3}{2}\}$

مناطق التناقص $\{x : x>\frac{-3}{2}\}$

$x=\frac{-3}{2}$ (عظمى)

$f(\frac{-3}{2})=10-3(\frac{-3}{2})-(\frac{-3}{2})^2$

$=10+\frac{9}{2}-\frac{9}{4}=$

$=\frac{40+18-9}{4}=\frac{49}{4}$

$(\frac{-3}{2},\frac{49}{4})$ نقطة نهاية عظمى

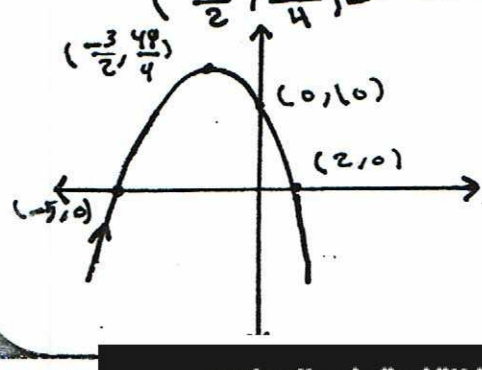
⑥ الانقلاب ومناطقها

$f''(x)=-2\ ,\ f''(x) \neq 0$

∴ لا توجد نقاط انقلاب والدالة محدبة في مجالها .

⑦ نقاط مساعدة لا نحتاج

⑧ الرسم .



* ملاحظات

① اذا كان الداله من الدرجه الثانيه فيكون شكل الداله كالآتي .

اذا كان معامل X^2 موجب



اذا كان معامل X^2 سالب



② اذا كانت الدالة من الدرجة الثالثة او الخامسة او السابعة او ----
وكانت تحتوي على نقطة حرجه منقلب ونقطة انقلاب يكون الرسم

اذا كان معامل X^3 موجب



اذا كان معامل X^3 سالب

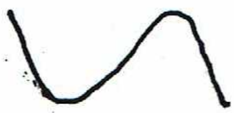


③ اذا كانت الدالة من الدرجه الثالثه و تحتوي نقطه نهاية عظمى وصغرى ونقطة انقلاب يكون الرسم

اذا كان معامل X^3 موجب

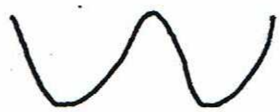


اذا كان معامل X^3 سالب

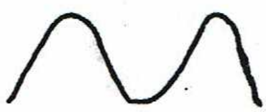


④ اذا كان الدالة من الدرجة الرابعه X^4 وتحتوي على X^2 وكانت تحتوي على ثلاث نهايات ونقطتين انقلاب فيكون الرسم

اذا كان معامل X^4 موجب



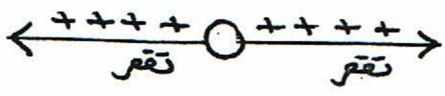
اذا كان معامل X^4 سالب



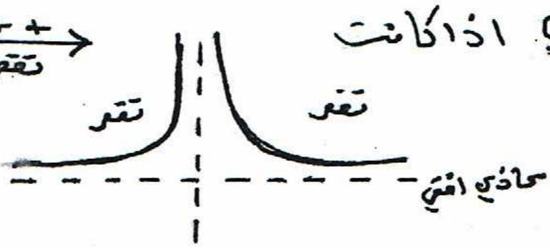
⑤ اذا كانت الدالة نسبية ولها محاذي عمودي وافقي
نقوم برسم اقواس اثنين منفصلات في ارباع المحاذيات وليس في الارباع الاصلية (المحاور) حتى لو قطعت الاقواس المحاور الاصلية .

ويكون الرسم حسب التقعر والتحدب (ويجوز حسب التزايد والتناقص)

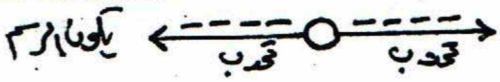
اذا كانت a

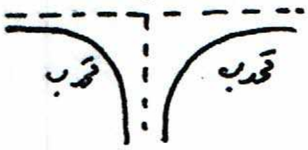


يكون الرسم

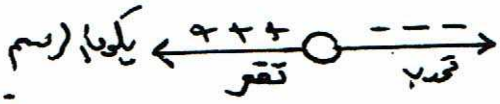


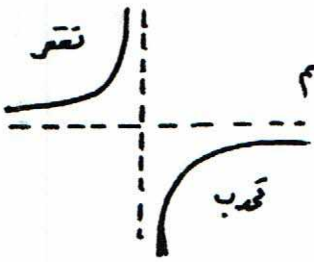
ط اذا كانت



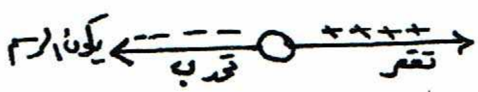


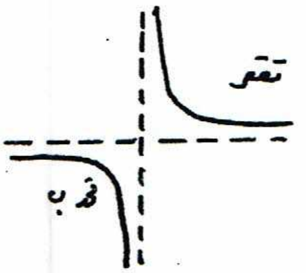
ي اذا كانت





ك اذا كان



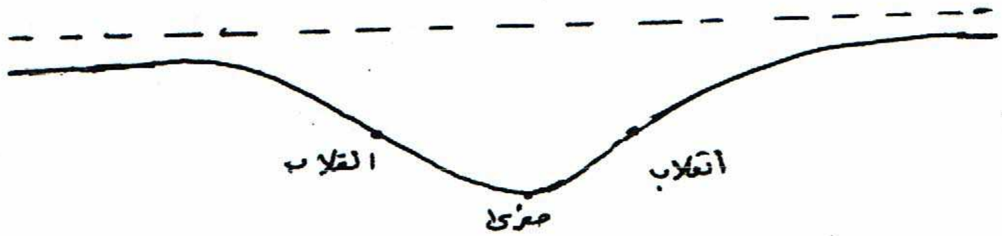


⑥ اذا كانت الدالة لها محاذي أفقي فقط ونقطة نهاية عظمى ونقطتين انقلاب

يكون الرسم



⑦ اذا كانت الدالة لها محاذي أفقي فقط ونقطة نهاية صغرى ونقطتين انقلاب يكون الرسم



س/ ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل منحني الدالة $f(x) = x^5$

$f(x) = x^5$

① اوسع مجال الدالة هو R

② التقاطع مع المحورين

$x = 0$, $f(0) = (0)^5 = 0$, (0,0) مع محور الصادات

$y = 0$, $x^5 = 0 \Longrightarrow x = 0$, (0,0) مع محور السينات

③ التناظر (الاس فردي)

$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$f(-x) = (-x)^5 = -x^5$, $f(-x) = -f(x)$

∴ الدالة متناظرة مع نقطة الاصل لان $f(-x) = -f(x)$ وغير متناظرة مع محور الصادات.

④ المحاذيات لاتوجد محاذيات لانها دالة ليست نسبية.

⑤ النهايات ومناطقها

$f'(x) = 5x^4$, $f'(x) = 0 \Longrightarrow 5x^4 = 0] \div 5$

$x^4 = 0 \Longrightarrow x = 0$ حرجة

$+ + + + + \; 0 \; + + + + +$ (x<0 , x>0) $f'(x) = 5x^4$

مناطق التزايد : $\{x : x < 0\}$, $\{x : x > 0\}$

$x = 0$ (حرجة فقط)

$f(0) = (0)^5 = 0$, (0,0) نقطة حرجة فقط

⑥ الانقلاب ومناطقها

$f''(x) = 20x^3$, $f''(x) = 0 \Longrightarrow 20x^3 = 0] \div 20$

$x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0$ مرشحة

$- - - - - \; 0 \; + + + + +$ (x<0 , x>0) $f''(x) = 20x^3$

تحدب (x<0) ، تقعر (x>0)

مناطق التقعر : $\{x : x > 0\}$

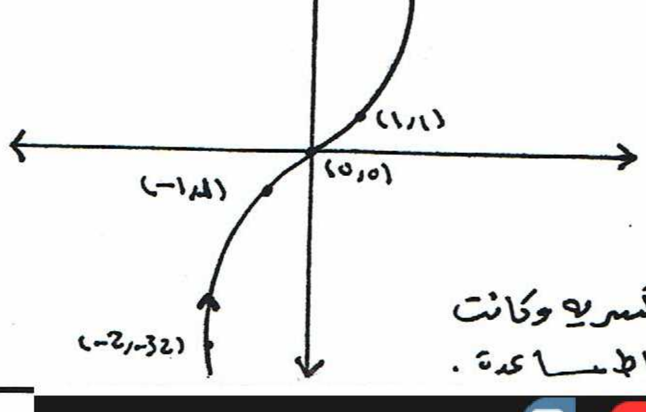
مناطق التحدب : $\{x : x < 0\}$

$x = 0$ (انقلاب)

$f(0) = (0)^5 = 0$, (0,0) نقطة انقلاب

⑦ نقاط مساعدة نحتاج لذلك

x	y	(x,y)
0	0	(0,0)
1	1	(1,1)
-1	-1	(-1,-1)
2	32	(2,32)
-2	-32	(-2,-32)



* ملاحظة اذا كانت الدالة ليست كسرية وكانت لاتحتوي على نهايات نحتاج الى نقاط مساعدة.

س: ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل منحني الدالة $f(x)=(1-x)^3+1$

$f(x)=(1-x)^3+1$

① اوسع مجال للدالة هو R

② التقاطع مع المحورين.

$x=0$ $y=0$

$f(0)=(1-0)^3+1=1+1=2$

$(0,2)$ مع محور الصادات

$(1-x)^3+1=0 \Rightarrow (1-x)^3=-1$ بالجذر

$1-x=-1 \Rightarrow x=2$

$(2,0)$ مع محور السينات

③ التناظر (الاسس فيستطيع)

$\forall x\in R, \exists (-x)\in R$

$f(-x)=[1-(-x)]^3+1=(1+x)^3+1$

∴ لا يوجد تناظر مع الصادات ولا مع نقطة الاصل لان

$f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$

④ المحاذيات لا توجد محاذيات لانها دالة ليست نسبية.

⑤ النهايات ومناطقها.

$f'(x)=3(1-x)^2\cdot(-1)$, $f'(x)=0$

$-3(1-x)^2=0] \div(-3) \Rightarrow (1-x)^2=0 \Rightarrow$ بالجذر $1-x=0 \Rightarrow x=1$ حرجه

$x<1$ 1 $x>1$ $f'(x)=-3(1-x)^2$

$x=1$ (حرجة فقط)

f متناقصة في $\{x: x>1\}$, $\{x: x<1\}$ نقطة حرجة فقط

$f(1)=(1-1)^3+1=1$, $(1,1)$

⑥ الانقلاب ومناطقها

$f''(x)=-6(1-x)\cdot(-1)$, $f''(x)=0$

$6(1-x)=0] \div 6 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$ مرشحه

$+ + x<1 + +$ 1 $- - x>1 - -$ $f''(x)=6(1-x)$

مقعر   محدب

مناطق التقعر: $\{x: x<1\}$

مناطق التحدب: $\{x: x>1\}$

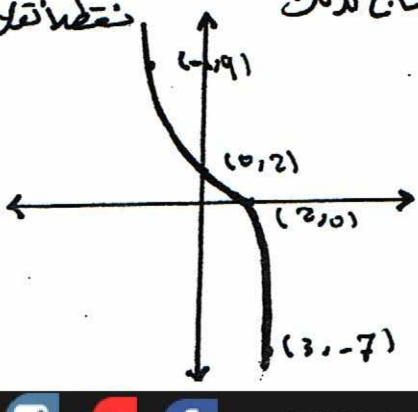
$x=1$ (انقلاب)

$f(1)=(1-1)^3+1=1$, $(1,1)$ نقطة انقلاب

⑦ نقاط مساعدة نحتاج لذلك

⑧ الرسم

x	y	(x,y)
0	2	(0,2)
1	1	(1,1)
-1	9	(-1,9)
2	0	(2,0)
-2	28	(-2,28)
3	-7	(3,-7)



س/ ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل منحني الدالة $y = x^3 - 3x^2 + 4$

$y = x^3 - 3x^2 + 4$

① اوسع مجال للداله هو R

② التقاطع مع المحورين

$x = 0$
$y = 0 - 0 + 4 = 4$

$y = 0$
$x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

من الصعوبه أن نجد قيم x لذلك نكتفي أن تشترك (0,4) مع محور الصادات

③ التناظر (الاسس مختلطه)

$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = -x^3 - 3x + 4$ ∴ الداله غير متناظره مع الصادات

ولا مع نقطة الاصل لان $f(-x) \neq f(x)$ ، $f(-x) \neq -f(x)$

④ المحاذيات لا توجد محاذيات لانها داله ليست نسبية.

⑤ النهايات ومناطقها $f'(x) = 3x^2 - 6x$ ، $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x] \div 3$

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$ $x = 0$ ، $x = 2$ } حرجه

$x<0$: + + + + ، 0 ، $(0,2)$: - - - - - ، 2 ، $x>2$: + + + + ← $f'(x) = 3x^2 - 6x$

f متزايدة في $\{x : x<0\}$ ، $\{x : x>2\}$

f متناقصه في الفترة المفتوحه (0,2)

$x = 0$ (عظمى)

$f(0) = 0 - 0 + 4 = 4$ ، (0,4) نقطة نهاية عظمى

$x = 2$ (صغرى)

$f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 4 = 0$ ، (2,0) نقطة نهاية صغرى

⑥ الانقلاب ومناطقها $f''(x) = 6x - 6$ ، $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0] \div 6$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ مرشحه

$x<1$: - - - محدب ، 1 ، $x>1$: + + + + مقعر ← $f''(x) = 6x - 6$

$x = 1$ (انقلاب)

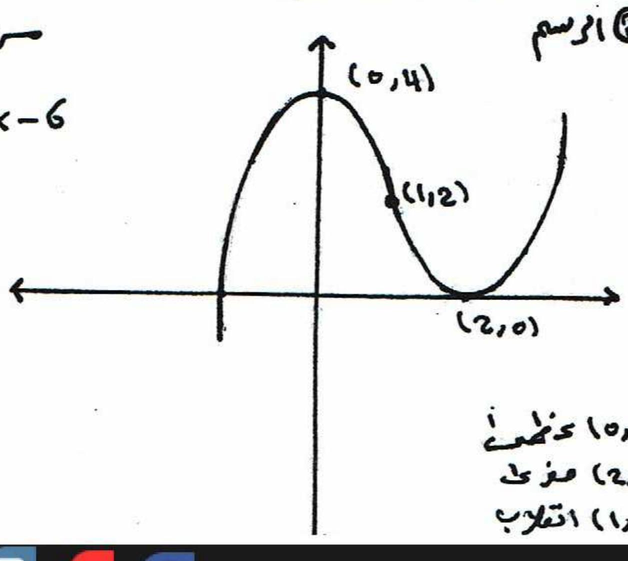
$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 4 = 2$

(1,2) نقطة انقلاب

f مقعرة في $\{x : x>1\}$

f محدبة في $\{x : x<1\}$

⑦ الرسم



(0,4) عظمى
(2,0) صغرى
(1,2) انقلاب

س ٧٩ / ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل منحني الدالة $f(x)=6x-x^3$

$f(x)=6x-x^3$

① اوسع مجال للدالة هو R

② التقاطع مع المحورين

$x=0$: $f(0)=0-0=0$ ، $(0,0)$ مع محور الصادات

$y=0$: $6x-x^3=0 \Rightarrow x(6-x^2)=0$

$x=0$

$x^2=6 \Rightarrow x=\pm\sqrt{6}$

مع محور السينات $(0,0)$ ، $(\sqrt{6},0)$ ، $(-\sqrt{6},0)$

③ التناظر (الاسس فردية)

$\forall x\in R, \exists(-x)\in R$

$f(-x)=6(-x)-(-x)^3=-6x+x^3$

∴ الدالة متناظرة مع نقطة الاصل لان $f(-x)=-f(x)$

وغير متناظرة مع محور الصادات

④ المحاذيات لا توجد محاذيات لانها دالة ليست نسبية.

⑤ النهايات ومناطقها $f'(x)=6-3x^2$ ، $f'(x)=0 \Rightarrow 6-3x^2=0]\div 3$

$2-x^2=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$ حرجة

$x<-\sqrt{2}$ ، $-\sqrt{2}$ ، $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ ، $\sqrt{2}$ ، $x>\sqrt{2}$

$- - - - - \; -\sqrt{2} \; + + + + \; \sqrt{2} \; - - - - -$ ← $f'(x)=6-3x^2$

f متزايدة في الفترة المفتوحة $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

f متناقصة في $\{x: x<-\sqrt{2}\}$ ، $\{x: x>\sqrt{2}\}$

$x=-\sqrt{2}$ (صغرى)

$f(-\sqrt{2})=6(-\sqrt{2})-(-\sqrt{2})^3$

$=-6\sqrt{2}+2\sqrt{2}=-4\sqrt{2}$ ، $(-\sqrt{2},-4\sqrt{2})$ نهاية صغرى

$x=\sqrt{2}$ (عظمى)

$f(\sqrt{2})=6(\sqrt{2})-(\sqrt{2})^3$

$=6\sqrt{2}-2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ ، $(\sqrt{2},4\sqrt{2})$ نهاية عظمى

⑥ الانقلاب ومناطقها $f''(x)=-6x$ ، $f''(x)=0 \Rightarrow -6x=0]\div(-6)$

$x=0$ مرشحة

$x<0$ ، 0 ، $x>0$

$+ + + + + \; 0 \; - - - - -$

مقعر ، محدب

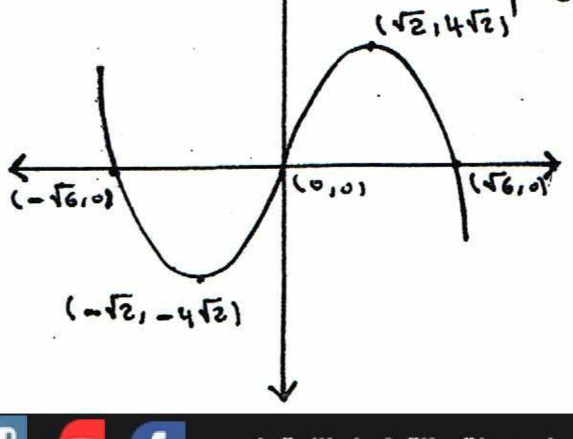
$x=0$ (انقلاب)

$f(0)=0-0=0$ ، $(0,0)$ نقطة انقلاب

f مقعرة في $\{x: x<0\}$

f محدبة في $\{x: x>0\}$

⑦ الرسم



س/ ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل منحني الدالة $f(x)=(x+2)(x-1)^2$

① اوسع مجال للدالة هو R

$f(x)=(x+2)(x-1)^2$

② التقاطع مع المحورين

$x=0$

$f(0)=(0+2)(0-1)^2=2$

$(0,2)$ مع محور الصادات

$y=0$

$(x+2)(x-1)^2=0$

$x=-2 \Rightarrow$ $(-2,0)$

$(x-1)^2=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1, (1,0)$ بالجذر

مع محور السينات

$f(x)=(x+2)(x^2-2x+1)$

لسهولة الحل نفتح الاقواس ثم نكمل بتقية النقاط

$f(x)=x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2$

$f(x)=x^3-3x+2$ داله

③ التناظر (الاسس مختلطة)

$\forall x\in R, \exists(-x)\in R$

$f(-x)=(-x)^3-3(-x)+2=-x^3+3x+2$

∴ الدالة غير متناظرة مع محور الصادات ولا مع نقطة الاصل

لان $f(-x)\neq f(x),\ f(-x)\neq -f(x)$

④ المحاذيات لا توجد محاذيات لانها دالة ليست نسبية.

⑤ النهايات ومناطقها $f'(x)=3x^2-3,\ f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0\ ]\div 3$

$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$ حرجة

$x<-1$: $+ + + + +$; -1 ; $(-1,1)$: $- - - - -$; 1 ; $x>1$: $+ + + + +$; $f'(x)=3x^2-3$

f متزايدة في $\{x: x<-1\}, \{x: x>1\}$

f متناقصة في الفترة المفتوحة $(-1,1)$

$x=-1$ (عظمى)

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2=4,\ (-1,4)$ نهاية عظمى

$x=1$ (صغرى)

$f(1)=(1)^3-3(1)+2=0,\ (1,0)$ نهاية صغرى

⑥ الانقلاب ومناطقها $f''(x)=6x,\ f''(x)=0 \Rightarrow 6x=0\ ]\div 6 \Rightarrow x=0$ مرشحة

$x<0$: $- - - -$; 0 ; $x>0$: $+ + + +$; $f''(x)=6x$

محدب ; مقعر

$x=0$ (انقلاب)

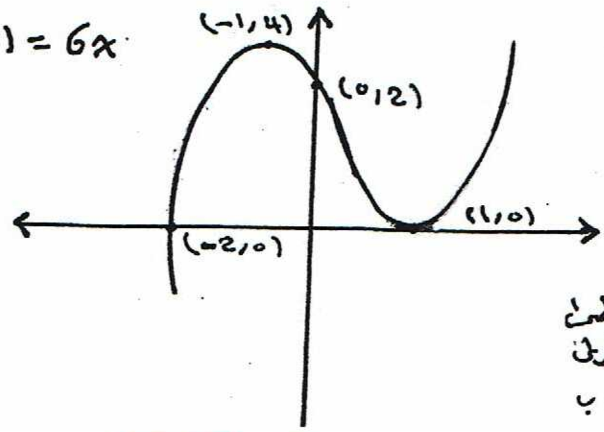
$f(0)=0-0+2=2$

$(0,2)$ نقطة انقلاب

f مقعرة في $\{x: x>0\}$

f محدبة في $\{x: x<0\}$

⑦ الرسم



(-1,4) عظمى

(1,0) صغرى

(0,2) انقلاب

س/ ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل منحني الدالة $f(x)=2x^2-x^4$

$f(x)=2x^2-x^4$

① اوسع مجال للدالة هو R

② التقاطع مع المحورين

$x=0$: $f(0)=0-0=0$ ، $(0,0)$ مع محور الصادات

$y=0$: $2x^2-x^4=0 \Rightarrow x^2(2-x^2)=0$

$x^2=0 \Rightarrow x=0$ $(0,0)$

$x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$ $(\sqrt{2},0),(-\sqrt{2},0)$ } مع محور السينات

③ التناظر (الاسس زوجية)

$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$f(-x)=2(-x)^2-(-x)^4=2x^2-x^4$

الدالة متناظرة مع محور الصادات لان $f(-x)=f(x)$ وغير متناظرة مع نقطة الاصل.

④ المحاذيات لاتوجد محاذيات لانها دالة ليست نسبية.

⑤ النهايات ومناطقها $f'(x)=4x-4x^3$ ، $f'(x)=0 \Rightarrow 4x-4x^3=0]\div 4$

$x-x^3=0 \Rightarrow x(1-x^2)=0$ ، $x=0$ ، $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$ } قيم x الحرجة

$x<-1$ ، $(-1,0)$ ، $(0,1)$ ، $x>1$

$f'(x)=4x-4x^3$: $++++$ -1 $----$ 0 $++++$ 1 $----$ (متزايدة ↗ ، متناقصة ↘ ، متزايدة ↗ ، متناقصة ↘)

$x=-1$ (عظمى)

$f(-1)=2(-1)^2-(-1)^4=1$ ، $(-1,1)$ نهاية عظمى

$x=0$ (صغرى)

$f(0)=0-0=0$ ، $(0,0)$ نهاية صغرى

$x=1$ (عظمى)

$f(1)=2(1)^2-(1)^4=1$ ، $(1,1)$ نهاية عظمى

f متزايدة في الفترة المفتوحة $(0,1)$ ، $\{x: x<-1\}$

f متناقصة في الفترة المفتوحة $(-1,0)$ ، $\{x: x>1\}$

⑥ الانقلاب ومناطقها $f''(x)=4-12x^2$ ، $f''(x)=0 \Rightarrow 4-12x^2=0]\div 4$

$1-3x^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ مرشحة

$x<\frac{-1}{\sqrt{3}}$ ، $(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ ، $x>\frac{1}{\sqrt{3}}$

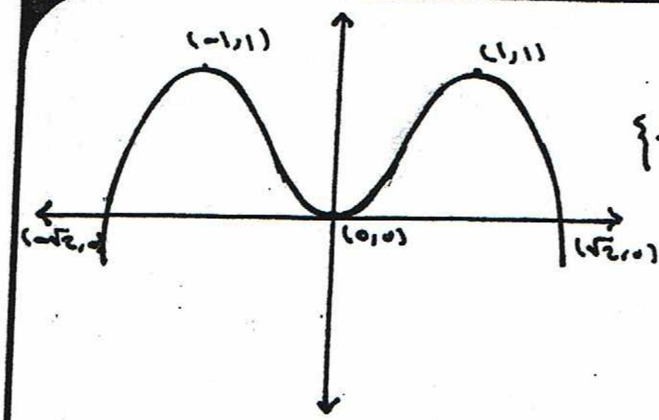
$f''(x)=4-12x^2$: $----$ $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ $++++$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $----$ (محدب ، مقعر ، محدب)

$x=\frac{-1}{\sqrt{3}}$ (انقلاب)

$f(\frac{-1}{\sqrt{3}})=2(\frac{-1}{\sqrt{3}})^2-(\frac{-1}{\sqrt{3}})^4=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{6-1}{9}=\frac{5}{9}$ ، $(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{5}{9})$ نقطة انقلاب

$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (انقلاب)

$f(\frac{1}{\sqrt{3}})=2(\frac{1}{\sqrt{3}})^2-(\frac{1}{\sqrt{3}})^4=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$ ، $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{5}{9})$ نقطة انقلاب



f مقعرة في الفترة المفتوحة $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

f محدبة في $\{x : x < \frac{-1}{\sqrt{3}}\} \cup \{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\}$

⑦ الرسم

عظمى $(-1,1)$

صغرى $(0,0)$

عظمى $(1,1)$

نقاط تقاطع $\{(\sqrt{2},0), (-\sqrt{2},0)$

س٧ ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل منحني الدالة $f(x)=\frac{6}{x^2+3}$

---

① اوسع مجال للدالة هو R لان المقام مجموع مربعين $f(x)=\frac{6}{x^2+3}$

② التقاطع مع المحورين

$x=0$ ← → $y=0$

$f(0)=\frac{6}{0+3}=\frac{6}{3}=2$ $\frac{6}{x^2+3}=0 \Rightarrow 6 \neq 0$

$(0,2)$ مع محور الصادات ∴ لا توجد نقاط تقاطع مع محور السينات

③ التناظر $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$f(-x)=\frac{6}{(-x)^2+3}=\frac{6}{x^2+3}$ الدالة متناظرة مع محور الصادات لان $f(-x)=f(x)$

وغير متناظرة مع نقطة الاصل.

④ المحاذيات

محاذي عمودي ← → محاذي افقي

$x^2+3 \neq 0$ مجموع مربعين. اذا كان البسط عدد ثابت فان المحاذي الافقي

∴ لا يوجد محاذي عمودي يكون $y=0$

⑤ $f(x)=6(x^2+3)^{-1} \Rightarrow f'(x)=-6(x^2+3)^{-2}\cdot(2x)$

$f'(x)=\frac{-12x}{(x^2+3)^2}$, $f'(x)=0 \Rightarrow -12x=0 \Rightarrow x=0$ حرجة

نأخذ البسط فقط عندما نساويه بالصفر

$x<0$ + + + + 0 − − − − $x>0$ $f'(x)=\frac{-12x}{(x^2+3)^2}$

f متزايدة في $\{x : x<0\}$ $x=0$ (عظمى)

f متناقصة في $\{x : x>0\}$ $f(0)=\frac{6}{0+3}=2$

$(0,2)$ نهاية عظمى

⑥ الانقلاب ومناطقها

$$f'(x)=\frac{-12x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x)=\frac{[(x^2+3)^2\cdot(-12)]-[-12x\cdot 2(x^2+3)^1\cdot 2x]}{(x^2+3)^4}$$

* اذا كان المقام قوس اذ و أس 4 نستخرج عامل مشترك نفس القوس في البسط

$$f''(x)=\frac{(x^2+3)[(x^2+3)(-12)+48x^2]}{(x^2+3)^{4\,3}}=\frac{-12x^2-36+48x^2}{(x^2+3)^3}$$

$$f''(x)=\frac{36x^2-36}{(x^2+3)^3},\quad f''(x)=0\Rightarrow 36x^2-36=0]\div 36\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1$$

نأخذ البسط فقط — مرشحة

$x<-1$ ، $(-1,1)$ ، $x>1$

+ + + + + −1 − − − − − 1 + + + + +

تقعر — تحدب — تقعر

f مقعرة في $\{x: x<-1\}$ ، $\{x: x>1\}$

f محدبة في الفترة المفتوحة $(-1,1)$

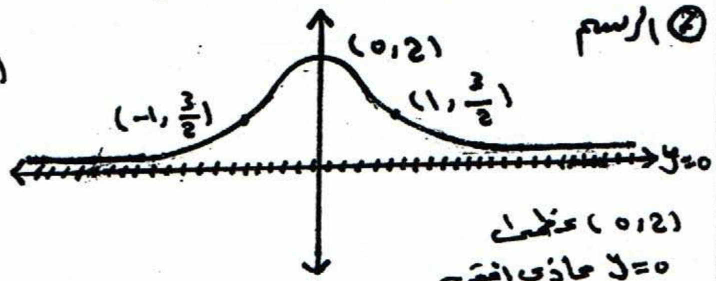
$x=-1$ (انقلاب)

$$f(-1)=\frac{6}{1+3}=\frac{3}{2},\quad (-1,\tfrac{3}{2})$$ نقطة انقلاب

$x=1$ (انقلاب)

$$f(1)=\frac{6}{1+3}=\frac{3}{2},\quad (1,\tfrac{3}{2})$$ نقطة انقلاب

⑦ الرسم



(0,2) عظمى

y=0 محاذي افقي

س ٧ ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل منحني الداله $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

---

① اوسع مجال الداله هو R لان المقام مجموع مربعين $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

② التقاطع مع المحورين

$x=0$ — $y=0$

$$f(0)=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$(0,-1)$ مع محور الصادات

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x=\pm1$$

مع محور السينات $(1,0),(-1,0)$

③ التناظر

$\forall x\in R,\ \exists(-x)\in R$

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

∴ الداله متناظرة مع محور الصادات لان $f(-x)=f(x)$ وغير متناظرة مع نقطة الاصل.

④ المحاذيات

محاذي افقي — محاذي عمودي

$y=\frac{1}{1}$ — $x^2+1\neq 0$ مجموع مربعين.

محاذي افقي $y=1$ — ∴ لا يوجد محاذي عمودي

يتبع ←

⑤ النهايات ومناطقها.

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{4x}{(x^2+1)^2} \quad , f'(x)=0$$

$4x=0 \Longrightarrow x=0$ حرجة

$x<0$ − − − − 0 + + + + $x>0$ $\quad f'(x)=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$

$x=0$ (صغرى)

$f(0)=\frac{0-1}{0+1}=-1 \quad ,(0,-1)$ نهاية صغرى

f متزايدة في $\{x: x>0\}$

f متناقصة في $\{x: x<0\}$

⑥ الانقلاب ومناطقها

$$f''(x)=\frac{[(x^2+1)^2(4)]-[(4x)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x]}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2+1)[(x^2+1)(4)-16x^2]}{(x^2+1)^4} \Rightarrow f''(x)=\frac{4x^2+4-16x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x)=\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3} \quad , f''(x)=0 \Longrightarrow 4-12x^2=0 \;]\div 4 \Longrightarrow 1-3x^2=0$$

$x^2=\frac{1}{3} \Longrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ مرشحة

$x<\frac{-1}{\sqrt{3}}$ − − − − $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ + + + + $\frac{1}{\sqrt{3}}$ − − − − $x>\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad (\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ $\quad f''(x)=\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^2}$

محدب ——— مقعر ——— محدب

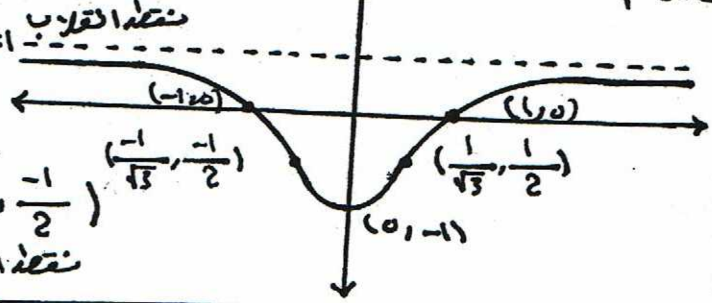
$x=\frac{-1}{\sqrt{3}}$ (انقلاب)

f مقعرة في الفترة المفتوحة $(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$

$$f(\tfrac{-1}{\sqrt{3}})=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{-2}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{-1}{2} \quad ,(\tfrac{-1}{\sqrt{3}},\tfrac{-1}{2})$$

f محدبة في $\{x: x<\frac{-1}{\sqrt{3}}\}$ ، $\{x: x>\frac{1}{\sqrt{3}}\}$

⑦ الرسم



$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (انقلاب)

$$f(\tfrac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{-1}{2} \quad ,(\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{-1}{2})$$

نقطة انقلاب

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

① اوسع مجال للدالة هو R لان المقام مجموع مربعين .

② التقاطع مع المحورين .

$x=0$

$f(0)=\frac{0}{0+1}=0$

$(0,0)$ مع محور الصادات

$y=0$

$\frac{x^2}{x^2+1}=0 \Longrightarrow x^2=0 \Longrightarrow x=0$

$(0,0)$ مع محور السينات

يتبع ⟵

③ التناظر $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1}$ ∴ الدالة متناظرة مع محور الصادات لان $f(-x)=f(x)$ وغير متناظرة مع نقطة الاصل.

④ المحاذيات

محاذي افقي: $y = \frac{1}{1}$ ، $y=1$ محاذي افقي

محاذي عمودي: $x^2+1 \neq 0$ مجموع مربعين. لايوجد محاذي عمودي

⑤ النهايات ومناطقها. $f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x)-(x^2)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, $f'(x)=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$ حرجة

$x<0$ ، $x>0$: - - - - - - 0 + + + + + + ، $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

f متزايدة في $\{x: x>0\}$

f متناقصة في $\{x: x<0\}$

$x=0$ (حرجة)

$f(0) = \frac{0}{0+1} = 0$, $(0,0)$ نهاية صغرى

⑥ الانقلاب ومناطقها

$f''(x) = \frac{[(x^2+1)^2(2)]-[(2x)\cdot 2(x^2+1)\cdot(2x)]}{(x^2+1)^4}$

$f''(x) = \frac{(x^2+1)[(x^2+1)2-8x^2]}{(x^2+1)^{4}_{3}} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3}$

$f''(x) = \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$, $f''(x)=0 \Rightarrow 2-6x^2=0]\div 2 \Rightarrow 1-3x^2=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt3}$ مرشحة

$x<\frac{-1}{\sqrt3}$ ، $(\frac{-1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3})$ ، $x>\frac{1}{\sqrt3}$: - - - - - $\frac{-1}{\sqrt3}$ + + + + + $\frac{1}{\sqrt3}$ - - - - - ، $f''(x) = \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$

محدب ، مقعر ، محدب

f مقعرة في الفترة المفتوحة $(\frac{-1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3})$

f محدبة في $\{x: x<\frac{-1}{\sqrt3}\}$, $\{x: x>\frac{1}{\sqrt3}\}$

$x = \frac{-1}{\sqrt3}$ (انقلاب)

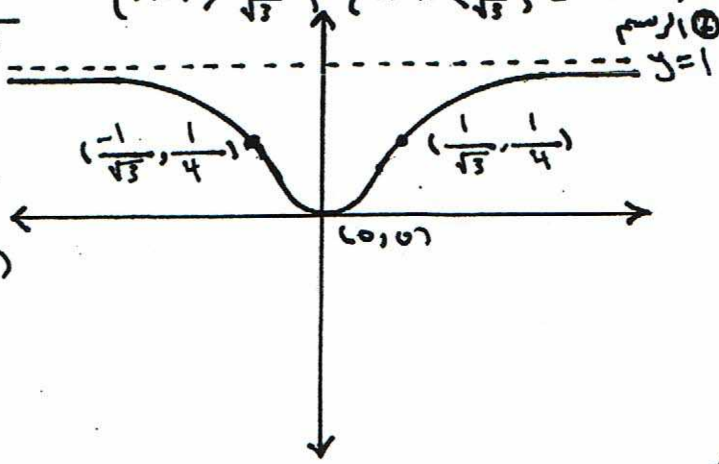
$f(\frac{-1}{\sqrt3}) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$

$(\frac{-1}{\sqrt3}, \frac{1}{4})$ نقطة انقلاب

$x = \frac{-1}{\sqrt3}$

$f(\frac{1}{\sqrt3}) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{4}$, $(\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{4})$ نقطة انقلاب

⑦ الرسم



س/ ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل منحني الداله $f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$

$f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$

① مجال الداله ، $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

∴ اوسع مجال الدالة هو $R-\{-1\}$

② التقاطع مع المحورين

$x=0$

$f(0)=\frac{0-1}{0+1}=-1$

$(0,-1)$ مع محور الصادات

$y=0$

$\frac{3x-1}{x+1}=0 \Rightarrow 3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

$(\frac{1}{3},0)$ مع محور السينات

③ التناظر : لا يوجد تناظر مع محور الصادات ولا مع نقطة الاصل لان (-1) لا ينتمي لمجال الدالة لكن (1) ينتمي لمجال الدالة.

④ المحاذيات

محاذي عمودي

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$ محاذي عموديا

محاذي افقي

$y=\frac{3}{1} \Rightarrow y=3$ محاذي افقي

⑤ النهايات ومناطقها

$f'(x)=\frac{(x+1)(3)-(3x-1)(1)}{(x+1)^2}=\frac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2}$

$f'(x)=\frac{4}{(x+1)^2}$ ، $f'(x)=0 \Rightarrow 4\neq 0$

∴ الداله لا تمتلك نهايات والقاط حرجه

نجد مناطق التزايد والتناقص فقط . (راجع ص 53 س 10)

$(x+1)^2=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$ مجهول

$x<-1$: + + + + ، -1 ، $x>-1$: + + + + ، $f'(x)=\frac{4}{(x+1)^2}$

∴ f متزايده في $\{x: x<-1\}$ ، $\{x: x>-1\}$

⑥ الانقلاب ومناطقها

$f'(x)=4(x+1)^{-2} \Rightarrow f''(x)=-8(x+1)^{-3}$

$f''(x)=\frac{-8}{(x+1)^3}$ ، $f''(x)=0 \Rightarrow -8\neq 0$

∴ الداله لا تمتلك نقاط انقلاب

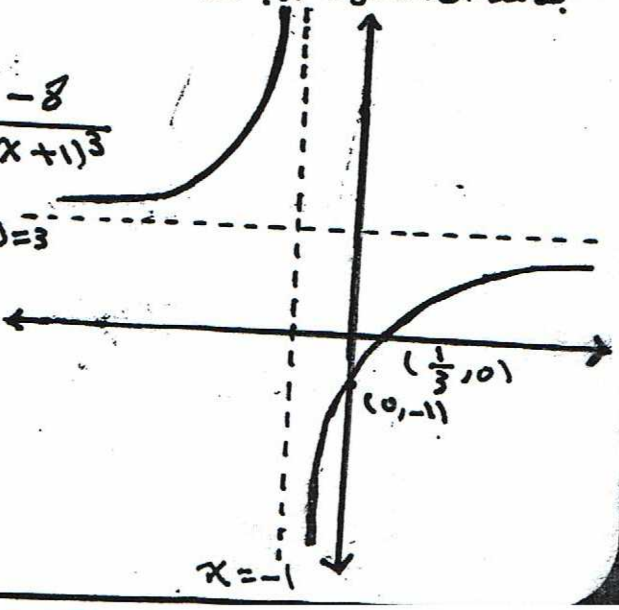
نجد مناطق التقعر والتحدب فقط

$(x+1)^3=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$ مجهول

$x<-1$: + + + + (تقعر) ، -1 ، $x>-1$: - - - - (تحدب) ، $f''(x)=\frac{-8}{(x+1)^3}$

f مقعرة في $\{x: x<-1\}$

f محدبة في $\{x: x>-1\}$



س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

① مجال الدالة

$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ ، $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

∴ اوسع مجال للدالة هو $R-\{-1\}$

② التقاطع مع المحورين

$x=0$ $y=0$

$f(0)=\frac{0-1}{0+1}=-1$ $\frac{x-1}{x+1}=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

$(0,-1)$ مع محور الصادات $(1,0)$ مع محور السينات

③ التناظر : لا يوجد تناظر مع محور الصادات ولا مع نقطة الاصل لان (-1) لا ينتمي لمجال الدالة لكن (1) ينتمي لمجال الدالة .

④ المحاذيات

محاذي عمودي   محاذي افقي

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$ محاذي عمودي $y=\frac{1}{1} \Rightarrow y=1$ محاذي افقي

⑤ النهايات ومناطقها

$f'(x)=\frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$

$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$ ، $f'(x)=0 \Rightarrow 2\neq 0$ ∴ الدالة لا تمتلك نهايات ولا نقاط حرجة نجد مناطق التزايد والتناقص فقط راجع ص53 س10

$(x+1)^2=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$ فحوص

$x<-1$: $+ + + +$ -1 $x>-1$: $+ + + +$ $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$

f متزايدة في $\{x: x<-1\}$ ، $\{x: x>-1\}$

⑥ نقاط الانقلاب ومناطقها

$f'(x)=2(x+1)^{-2} \Rightarrow f''(x)=-4(x+1)^{-3}(1)$

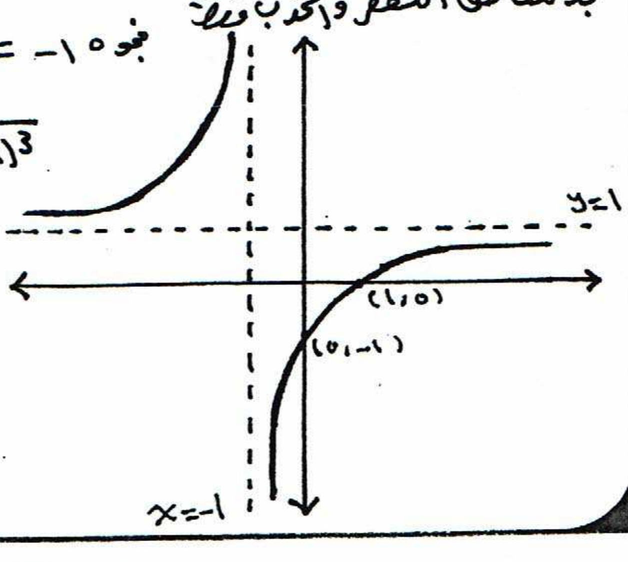
$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{-4}{(x+1)^3}=0 \Rightarrow -4\neq 0$ ∴ الدالة لا تمتلك نقاط انقلاب نجد مناطق التقعر والتحدب فقط

$(x+1)^3=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$ فحوص

$x<-1$: $+ + + +$ (مقعرة) -1 $x>-1$: $- - - -$ (محدبة) $f''(x)=\frac{-4}{(x+1)^3}$

f مقعرة في $\{x: x<-1\}$

f محدبة في $\{x: x>-1\}$



س/ ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل منحني الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$

$f(x)=\frac{1}{x}$ ، $x=0$

① مجال الدالة

∴ اوسع مجال للدالة هو $R-\{0\}$

② التقاطع مع المحورين

$x=0$ ، $y=0$

$f(0)=\frac{1}{0}$ غير معرف ، $\frac{1}{x}=0 \Rightarrow 1\neq 0$

∴ لا توجد نقاط تقاطع مع محور السينات ولا مع محور الصادات

③ التناظر

$\forall x \in R-\{0\}$ ، $\exists (-x) \in R-\{0\}$

$f(-x)=\frac{1}{-x}$

∴ الدالة متناظرة مع نقطة الاصل لان $f(-x)=-f(x)$ ، وغير متناظرة مع محور الصادات .

④ المحاذيات

محاذي افقي ، محاذي عمودي

$x=0$ محاذي عمودي ، $y=0$ محاذي افقي ، راجع الملاحظة ص 78

⑤ النهايات ومناطقها

$f(x)=x^{-1} \Rightarrow f'(x)=-x^{-2}$ ، $f'(x)=0$

$\frac{-1}{x^2}=0 \Rightarrow -1\neq 0$

∴ الدالة لا تمتلك نهايات ولا نقاط حرجة نجد مناطق التزايد والتناقص فقط

$x^2=0 \Rightarrow x=0$ فجوة

$x<0$ ، 0 ، $x>0$ ، $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$

f متناقصة في $\{x: x<0\}$ ، $\{x: x>0\}$

⑥ الانقلاب ومناطقها

$f'(x)=-x^{-2} \Rightarrow f''(x)=2x^{-3} \Rightarrow f''(x)=\frac{2}{x^3}$

$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{2}{x^3}=0 \Rightarrow 2\neq 0$

∴ الدالة لا تمتلك نقاط انقلاب نجد مناطق التقعر والتحدب فقط

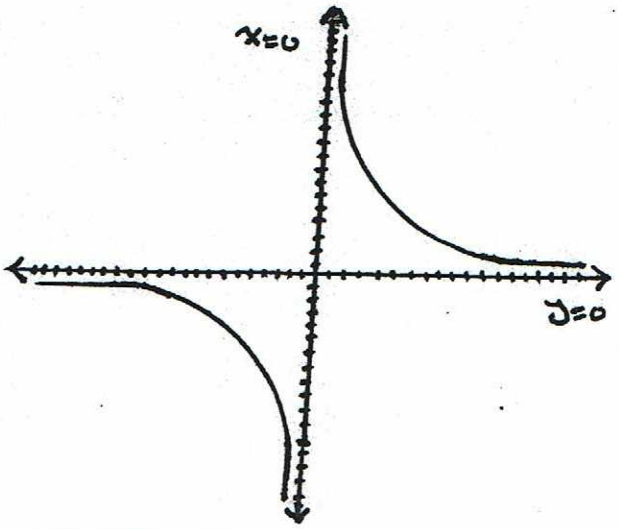
$x^3=0 \Rightarrow x=0$ فجوة

$x<0$ (- - - -) ، 0 ، $x>0$ (+ + + +) ، $f''(x)=\frac{2}{x^3}$

تحدب ، تقعر

f مقعرة في $\{x: x>0\}$

f محدبة في $\{x: x<0\}$



عامة
س/ ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل منحني الدالة $yx^2=1$

① مجال الدالة
$yx^2=1 \Rightarrow y=\frac{1}{x^2}$ ، $x^2=0 \Rightarrow x=0$
∴ اوسع مجال الدالة هو $R-\{0\}$

② التقاطع مع المحورين

$x=0$ | $y=0$
$f(0)=\frac{1}{0}$ غير معرفة | $\frac{1}{x^2}=0 \Rightarrow 1\neq 0$

∴ لا توجد نقاط تقاطع مع محور السينات ولا مع محور الصادات .

③ التناظر
$\forall x \in R-\{0\}, (-x) \in R-\{0\}$
$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}$
∴ الدالة متناظرة مع محور الصادات لان $f(-x)=f(x)$
وغير متناظرة مع نقطة الاصل .

④ المحاذيات

محاذي افقي | محاذي عمودي

محاذي افقي $y=0$ ، محاذي عمودي $x^2=0 \Rightarrow x=0$

⑤ النهايات ومناطقها
$f(x)=x^{-2} \Rightarrow f'(x)=-2x^{-3} \Rightarrow f'(x)=\frac{-2}{x^3}$
$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2}{x^3} \Rightarrow -2\neq 0$
∴ الدالة لا تمتلك نهايات ولا نقاط حرجة
نجد مناطق التزايد والتناقص فقط
$x^3=0 \Rightarrow x=0$ فجوة

$f'(x)=\frac{-2}{x^3}$: $x<0$ (+ + +) ، 0 ، $x>0$ (- - -)

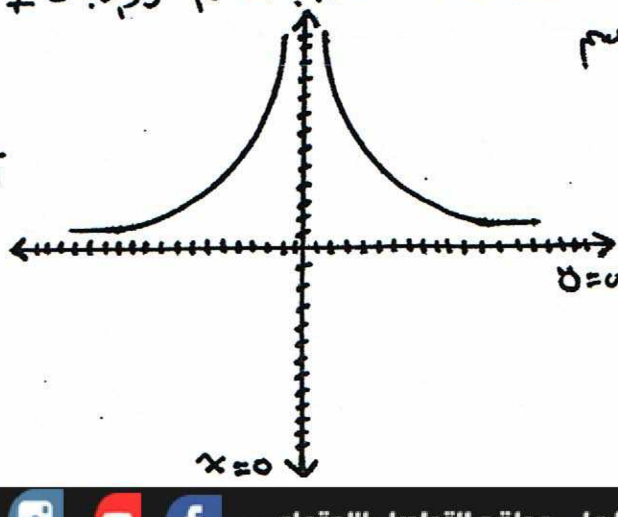
f متزايدة في $\{x: x<0\}$
f متناقصة في $\{x: x>0\}$

⑥ الانقلاب ومناطقها
$f'(x)=-2x^{-3} \Rightarrow f''(x)=6x^{-4} \Rightarrow f''(x)=\frac{6}{x^4}$
$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{6}{x^4}=0 \Rightarrow 6\neq 0$
∴ الدالة لا تمتلك نقاط انقلاب نجد مناطق التقعر والتحدب
$x^4=0 \Rightarrow x=0$ فجوة

$f''(x)=\frac{6}{x^4}$: $x<0$ (+ + + +) مقعر ، 0 ، $x>0$ (+ + + +) مقعر

f مقعرة في $\{x: x<0\}$ ، $\{x: x>0\}$

⑦ الرسم



واجب

س١/ ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل منحني كل من الدوال الآتية

① $f(x) = 8 + 2x - x^2$

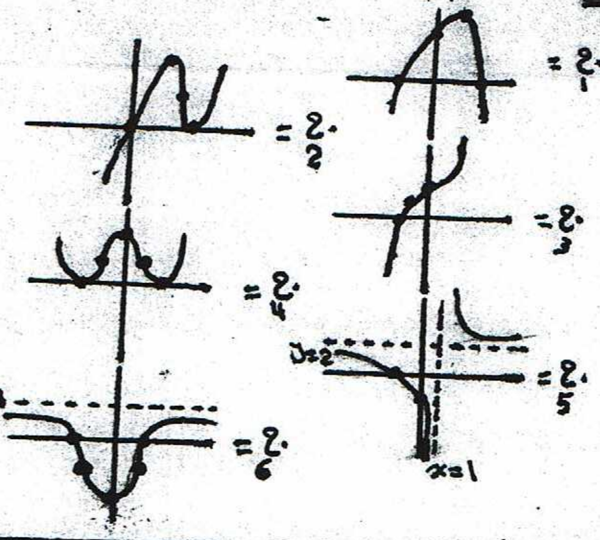
② $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

③ $f(x) = (x+1)^3 + 1$

④ $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

⑤ $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

⑥ $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+1}$



تطبيقات عملية على القيم العظمى أو الصغرى

لحل هذه المسائل نتبع مايلي

① نرسم شكلاً توضيحياً (أن أمكن) ونؤشر على الاجزاء ثم نفرض .

② نجد دالة أو علاقة حسب التعبير الموجود في السؤال من خلال كلمة (أقل أو أعظم أو اقرب أو أبعد أو أكبر أو أصغر - - -) ما يمكن وهذا التعبير يمثل النهاية العظمى أو الصغرى وهذه العلاقة تعتبر معادلة رقم ① وهي الاساسية في السؤال

③ اذا كانت المعادلة رقم ① تحتوي على متغير واحد نشتق ونساوي المشتقة بالصفر ونكمل حل السؤال .

④ أن لم تكن معادلة رقم ① تحتوي على متغير واحد يجب أن نجد علاقة أخرى من المعلومات المعطاة في السؤال ونكون داله أو علاقة رقم ② نعوض علاقة ② في ①

⑤ بعد تعويض علاقة ② في ① نبسط العلاقة ثم نشتق ونساوي المشتقة بالصفر ونجد قيمة المتغير ولايجاد قيمة المتغير الثاني نعوض قيمة المتغير في معادلة رقم ② ونجد المطلوب .

⑥ نتحقق من صحة الناتج بطرق اختبار المشتقة الاولى (خط الاعداد) أو الاختبار بالمشتقة الثانية كما مر سابقاً .

ملاحظة

① أن كلمة أعظم أو أكبر أو أبعد تعني نهاية عظمى .

② أن كلمة أقل أو أصغر أو أقرب تعني نهاية صغرى .

س/ جد العدد الذي اذا اضيف الى مربعه يكون الناتج اصغر ما يمكن

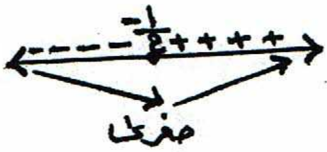
نفرض العدد $=x$

$\therefore$ مربعه $=x^2$

$f(x)=x+x^2$

$f'(x)=1+2x \quad , \quad f'(x)=0$

$1+2x=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=\frac{-1}{2}$



س/ جد عددين موجبين مجموعهما 75 وحاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن

نفرض العدد الاول $=x$

العدد الثاني $=y$

$L=xy^2$ ------ ①

$x+y=75 \Rightarrow x=75-y$ ------ ②

نعوض معادله ② في ①

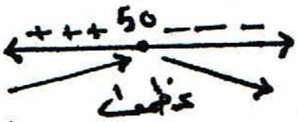
$L=(75-y)y^2 \Rightarrow L=75y^2-y^3$

$L'=150y-3y^2 \quad , \quad L'=0 \Rightarrow 150y-3y^2=0 \,]\div 3$

$50y-y^2=0 \Rightarrow y(50-y)=0$ < $y=0$ يهمل ، $50-y=0 \Rightarrow y=50$ العدد

نعوض قيمة y في معادله ②

$\therefore x=75-50 \Rightarrow x=25$ العدد

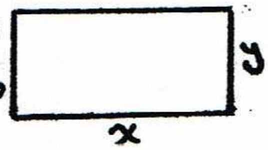


س/ جد أقل محيط ممكن للمستطيل الذي مساحته $16\,cm^2$

نفرض أبعاد المستطيل x, y

والمحيط P

والمساحه A



$P=2x+2y$ ------ ①

$A=xy$

$16=xy \Rightarrow xy=16 \Rightarrow y=\frac{16}{x}$ ------ ②

نعوض ② في ①

$P=2x+2\left(\frac{16}{x}\right) \Rightarrow P=2x+\frac{32}{x} \Rightarrow P=2x+32x^{-1}$

$P'=2-32x^{-2} \quad , \quad P'=0$

$2-\frac{32}{x^2}=0 \,]\cdot x^2 \Rightarrow 2x^2-32=0 \,]\div 2$

$x^2-16=0 \Rightarrow x=4 \qquad \therefore y=\frac{16}{4} \Rightarrow y=4$



$\therefore P=2x+2y \Rightarrow P=2(4)+2(4)$

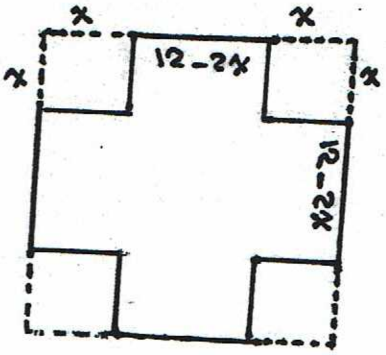
$=16\,cm$ أقل محيط للمستطيل

س٩ صنع صندوق مفتوح من قطعة من النحاس مربعة الشكل طول ضلعها 12cm وذلك بقص أربعة مربعات متساوية الابعاد من اركانها الاربعة ثم تثني الاجزاء البارزة منها. ما هو الحجم الاعظم لهذه العلبة.

نفرض طول ضلع المربع المقطوع = x

$V =$ الحجم

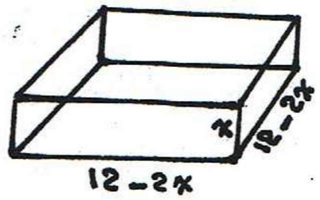
الحجم = (مساحة القاعدة المربعة) × (الارتفاع)



$$V = (12-2x)^2 \cdot x$$

$$V = (144 - 48x + 4x^2) \cdot x$$

$$V = 144x - 48x^2 + 4x^3$$



$$V' = 144 - 96x + 12x^2 , \quad V' = 0$$

$$144 - 96x + 12x^2 = 0 \;] \div 12$$

$$12 - 8x + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x-6)(x-2) = 0$$

+ + + 2 - - - (عظمى)

$x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$ لا يحقق، عند التعويض في قانون الحجم يكون الحجم يساوي صفر

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \therefore V = (12 - 2(2))^2 (2)$

الحجم الاعظم $V = (8)^2(2) = 128 \text{ cm}^3$

س١ جد عددين موجبين مجموعهما (20) وما حاصل ضربهما اكبر ما يمكن. ج: [$x=10, y=10$]

س٢ جد العدد الذي عند اضافته الى مقلوبه يكون الناتج اصغر ما يمكن (اي نظيره الضربي). ج: [$x=1$]

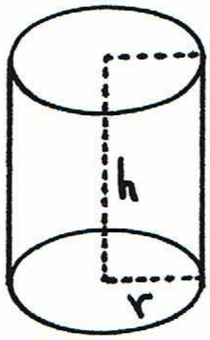
س٣ مستطيل محيطه 240cm ما طول كل من بعديه كي تكون مساحته اكبر ما يمكن. ج: [$x=60, y=60$]

س٤ صفيحة مستطيلة الشكل ابعادها 16cm ، 10cm قطعت من اركانها الاربعة مربعات متساوية الابعاد و تثنى الاجزاء البارزة منها فتكونت علبة على شكل متوازي المستطيلات بدون غطاء احسب طول ضلع المربع المقطوع ليكون حجم العلبة اكبر ما يمكن. ج: [$x = 2\text{cm}$]

س٥ جد قطر اكبر مستطيل محيطه 40cm. ج: [القطر $10\sqrt{2}$]

س٦ قطعة ارض مستطيلة الشكل على ضفة نهر يراد احاطتها بسياج طوله (100m) من ثلاث جهات اوجد ابعاد القطعة التي تجعل مساحتها اكبر ما يمكن. ج: [$x=25, y=50$]

س٣ علبة اسطوانية الشكل مفتوحة من الاعلى سعتها $(125\pi)\ cm^3$ جد ابعادها عندما تكون مساحة المعدن المستخدم في صنعها اقل ما يمكن



نفرض ابعاد الاسطوانة r, h

والحجم V والمساحة A

$A =$ المساحة الجانبية + مساحة قاعدة واحدة

$A =$ الارتفاع × محيط القاعدة + مساحة قاعدة واحدة (لانها مفتوحة)

$A = 2r\pi h + r^2\pi$ .... ①

$V = r^2\pi h \Rightarrow 125\pi = r^2\pi h$

$r^2 h = 125 \Rightarrow h = \frac{125}{r^2}$ .... ② نعوض ② في ①

$r^2\pi =$ مساحة القاعدة (دائرة)

$2r\pi =$ محيط القاعدة (دائرة)

$A = 2r\pi\left(\frac{125}{r^2}\right) + r^2\pi \Rightarrow A = \frac{250\pi}{r} + r^2\pi$

$A = 250\pi r^{-1} + r^2\pi$

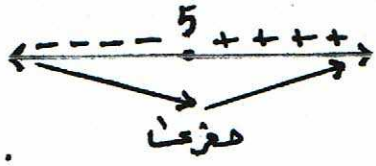
$A' = -250\pi r^{-2} + 2r\pi \quad , A' = 0$

$\frac{-250\pi}{r^2} + 2r\pi = 0 \quad] \times r^2$

$-250\pi + 2r^3\pi = 0 \quad] \div 2\pi$

$-125 + r^3 = 0 \Rightarrow r^3 = 125 \Rightarrow r = 5\ cm$

$\therefore h = \frac{125}{25} \Rightarrow h = 5\ cm$



$\therefore$ ابعاد الاسطوانة $r = 5cm, \ h = 5cm$

واجب

س٤ جد ابعاد علبة اسطوانية دائرية قائمة الشكل مغلقة من نهايتيها اذا كانت سعتها اكبر ما يمكن علماً ان مساحة المعدن المستخدم في صناعتها يساوي $(24\pi\ cm^2)$

$[\ r = 2cm \ , \ h = 4cm\ ] = ج$

س٥ جد اقل كمية من المعدن لصنع علبة اسطوانية مغلقة سعتها $54\pi cm^3$

$[\ A = 54\pi cm^2\ ] = ج$

س/ خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها فاذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعته ($108\,m^2$) جد ابعاد الخزان لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن علماً أن الخزان ذو غطاء كامل .

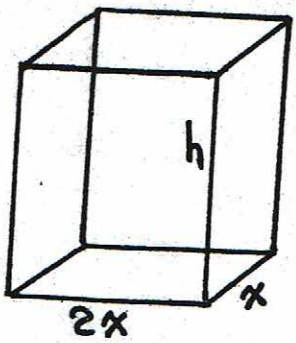
نفرض عرض الخزان x

∴ طول الخزان $2x$

الارتفاع h

الحجم V

(ابعاد)



ساحة القاعدة $= 2x^2$

محيط القاعدة $= 6x$

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = [(2x)(x)] \times h$$

$$V = 2x^2 h \text{ ------ } ①$$

المساحة = المساحة الجانبية + مساحة قاعدتين

المساحة = محيط القاعدة × الارتفاع + مساحة قاعدتين

$$A = 6x \cdot h + 2(2x^2)$$

$$A = 6xh + 4x^2$$

$$108 = 6xh + 4x^2 \,]\div 2$$

$$3xh + 2x^2 = 54$$

$$3xh = 54 - 2x^2 \Rightarrow h = \frac{54-2x^2}{3x} \text{ ------- } ②$$

نعوض ② في ①

$$V = 2x^2 \frac{54-2x^2}{3x} \Rightarrow V = \frac{2}{3}x(54-2x^2)$$

يفضل في الحل أن لا ندخل الثابت في القوس

$$V = \frac{2}{3}(54x - 2x^3) \Rightarrow V' = \frac{2}{3}(54 - 6x^2) \,,\; V' = 0$$

$$\frac{2}{3}(54 - 6x^2) = 0 \,]\div \frac{2}{3} \Rightarrow 54 - 6x^2 = 0 \,]\div 6$$

$$9 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$$

نعوض قيمة x في ②

$$h = \frac{54-2(3)^2}{3(3)} = \frac{54-18}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

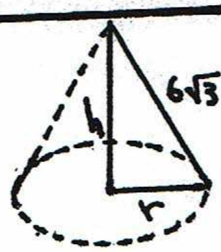
$$\therefore x = 3\,m \,,\; 2x = 6\,m \,,\; h = 4\,m$$

ابعاد الخزان

س/ خزان من الحديد ذو غطاء كامل على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وحجمه ($216\,m^3$) جد ابعاده لتكون كلفة الصفائح المستخدمة في صنعه اقل ما يمكن . [$x = 6m$, $h = 6m$] = ج

س/ متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وكان مجموع محيط قاعدته وارتفاعه يساوي $15\,cm$ جد ابعاده لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن [$x = \frac{5}{2}\,cm$, $h = 5\,cm$] = ج

س٧ جد اكبر حجم لمخروط دائري قائم ناتج من دوران مثلث قائم الزاوية طول وتره $(6\sqrt{3}\ cm)$ دورة كاملة حول احد ضلعيه القائمين .



نفرض ابعاد المخروط h, r والحجم V

$V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$ ----(1)

$h^2 + r^2 = (6\sqrt{3})^2$ فيثاغورس $\Rightarrow h^2 + r^2 = 108$

$r^2 = 108 - h^2$ ----(2)   نعوض (2) في (1)

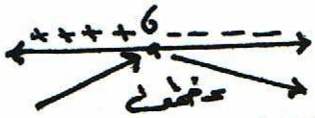
$V = \frac{1}{3} \pi h (108 - h^2)$

$V = \frac{\pi}{3}(108h - h^3) \Rightarrow V' = \frac{\pi}{3}(108 - 3h^2)\ , V' = 0$

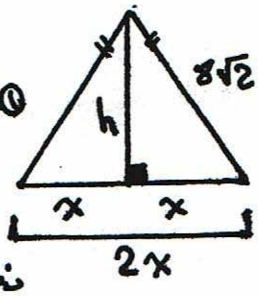
$\frac{\pi}{3}(108 - 3h^2) = 0] \div \frac{\pi}{3} \Rightarrow 108 - 3h^2 = 0] \div 3 \Rightarrow 36 - h^2 = 0$

$h^2 = 36 \Rightarrow h = 6$ نعوض قيمة h في معادلة (2) $\Rightarrow r^2 = 108 - 36 \Rightarrow r^2 = 72$

$\therefore V = \frac{\pi}{3}(72)(6) \Rightarrow V = 144\pi\ cm^3$ الحجم الاكبر



س٧ جد اكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $(8\sqrt{2}\ cm)$



نفرض ابعاد المثلث $h, 2x$ والمساحة A

$A = \frac{1}{2}$ (القاعدة)(الارتفاع) $\Rightarrow A = \frac{1}{2}(2x)h \Rightarrow A = xh$ ---(1)

$x^2 + h^2 = (8\sqrt{2})^2$ فيثاغورس $\Rightarrow x^2 + h^2 = 128$

$h^2 = 128 - x^2 \Rightarrow h = \sqrt{128 - x^2}$ -----(2)   نعوض (2) في (1)

راجع مرة في اشتقاقات الجذر

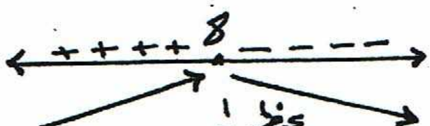
$A = x\sqrt{128 - x^2} \Rightarrow A = \sqrt{x^2(128 - x^2)} \Rightarrow A = \sqrt{128x^2 - x^4}$

$A' = \frac{256x - 4x^3}{2\sqrt{128x^2 - x^4}}\ , A' = 0 \Rightarrow 256x - 4x^3 = 0] \div 4$

نأخذ البسط فقط

$64x - x^3 = 0 \Rightarrow x(64 - x^2) = 0$ <
- $x = 0$ يهمل
- $x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$

$\therefore h = \sqrt{128 - 64} = \sqrt{64} = 8$



$\therefore A = (8)(8) = 64\ cm^2$ اكبر مساحة للمثلث

* ملاحظة

ما هو المقصود بأكبر شكل هندسي دون أن يحدد حجم أو محيط أو مساحة

① حجمه ← اذا كان الشكل في السؤال مجسم مثل (المكعب، الاسطوانة، المخروط، متوازي سطوح مستطيلة، ......)

② مساحته ← اذا كان الشكل في السؤال مستوي مثل (المربع، المستطيل، المثلث، الدائرة، ....)

مثلاً: جد أكبر اسطوانه ← ستكون الداله هي حجم الاسطوانه وتكون معادله رقم ①

جد أكبر مستطيل ← ستكون الداله هي مساحة المستطيل وتكون معادله رقم ①

* لاحظ الامثله الآتيه جيداً

① جد مساحة اكبر اسطوانه ← الداله هي حجم الاسطوانه

② جد اكبر مساحه لاسطوانه ← الداله هي مساحة الاسطوانه

③ جد محيط اكبر مستطيل ← الداله هي مساحة المستطيل

④ جد اكبر محيط لمستطيل ← الداله هي محيط المستطيل

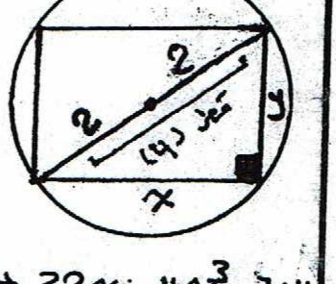
* ملاحظة مهمه جداً

① الاشكال الهندسية الموضوعة داخل كرة او دائرة المعادله الثانيه نجدها بطريقه مبرهنة فيثاغورس.

② الاشكال الهندسيه الموضوعة داخل مثلث او مخروط دائري المعادلة الثانيه نجدها أما من تشابه مثلثين او بوسطة استخدام $\tan\theta$.

س/ جد بعدي اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها (2cm).

ج/ نفرض ابعاد المستطيل x, y والمساحة A



$A = xy$ ----①

$x^2 + y^2 = (4)^2$ (فيثاغورس) $\Rightarrow y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$ ---②

$\therefore A = x\sqrt{16 - x^2} \Rightarrow A = \sqrt{x^2(16 - x^2)}$

$A = \sqrt{16x^2 - x^4} \Rightarrow A' = \frac{32x - 4x^3}{2\sqrt{16x^2 - x^4}}$, $A' = 0 \Rightarrow 32x - 4x^3 = 0$]$\div 4$

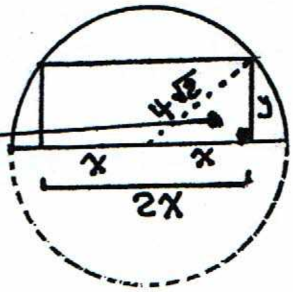
$8x - x^3 = 0 \Rightarrow x(8 - x^2) = 0 \Rightarrow$ < $x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{8}$ cm بعد

$\therefore y = \sqrt{16 - 8} \Rightarrow y = \ldots$

س/ جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها $(4\sqrt{2}\ cm)$

نفرض ان ابعاد المستطيل $2x, y$ والمساحة A

$A = 2x\,y$ ------ ①



$x^2 + y^2 = (4\sqrt{2})^2$ فيثاغورس

$x^2 + y^2 = 32$

$y^2 = 32 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{32 - x^2}$ ------ ②

نعوض ② في ①

$A = 2x\sqrt{32 - x^2}$

$A = 2\sqrt{x^2(32 - x^2)} \Rightarrow A = 2\sqrt{32x^2 - x^4}$

$A' = 2 \cdot \dfrac{64x - 4x^3}{2\sqrt{32x^2 - x^4}}$, $A' = 0 \Rightarrow 64x - 4x^3 = 0\,] \div 4$

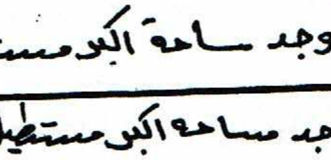
البسط نفسه

$16x - x^3 = 0 \Rightarrow x(16 - x^2) = 0$

- $x = 0$ يهمل
- $16 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

نعوض قيمة x في ②

$y = \sqrt{32 - 16} \Rightarrow y = \sqrt{16} \Rightarrow y = 4$



$\therefore$ الابعاد $2x = 8\ cm$, $y = 4\ cm$

واجب

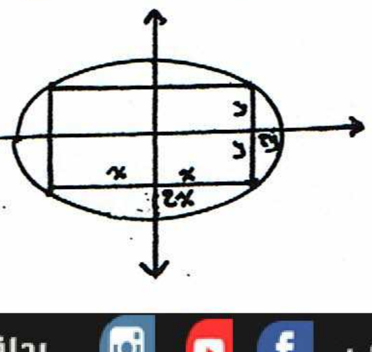
س1 اوجد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها $\sqrt{5}\ cm$ ج: $[A = 10\ cm^2]$

س2 جد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل نصف دائرة نصف قطرها $3\sqrt{2}\ cm$ ج: $[A = 18\ cm^2]$

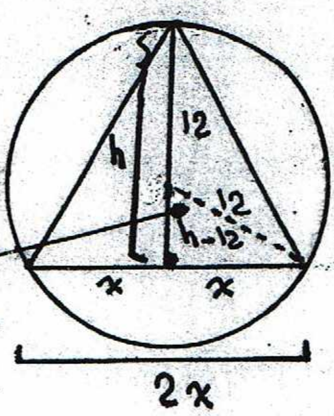
س3 جد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل القطع الناقص $x^2 + 2y^2 = 8$ ج: $[A = 8\sqrt{2}\ unit^2]$

س4 جد اكبر محيط لمستطيل مرسوم داخل القطع الناقص $2x^2 + y^2 = 6$ ج: $[P = 12\ unit]$

ابعاد المستطيل $2x, 2y$



س/ جد بعدي أكبر مثلث متساوي الساقين يمكن أن يوضع داخل دائرة نصف قطرها 12cm ثم برهن أن نسبة مساحة المثلث إلى مساحة الدائرة كنسبة $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$



نفرض أبعاد المثلث h ، $2x$ والمساحة A

$A = \frac{1}{2}$ (القاعدة) (الارتفاع)

$A = \frac{1}{2}(2x)(h) \Rightarrow A = xh$ ------ ①

$x^2 + (h-12)^2 = (12)^2$ مبرهنة فيثاغورس للمثلث الصغير

$x^2 + h^2 - 24h + 144 = 144$

$x^2 + h^2 - 24h = 0 \Rightarrow x^2 = 24h - h^2$

$x = \sqrt{24h - h^2}$ ------ ② نعوض ② في ①

$A = h\sqrt{24h - h^2} \Rightarrow A = \sqrt{h^2(24h - h^2)}$

$A = \sqrt{24h^3 - h^4} \Rightarrow A' = \frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}}$, $A' = 0$

$72h^2 - 4h^3 = 0 \;]\div 4$

$18h^2 - h^3 = 0 \Rightarrow h^2(18 - h) = 0$ ⟨ $h^2 = 0 \Rightarrow h = 0$ يهمل ، $18 - h = 0 \Rightarrow h = 18$

$x = \sqrt{24(18) - (18)^2} \Rightarrow x = \sqrt{18(24 - 18)}$ نعوض قيمة h في معادلة ② (عامل مشترك)

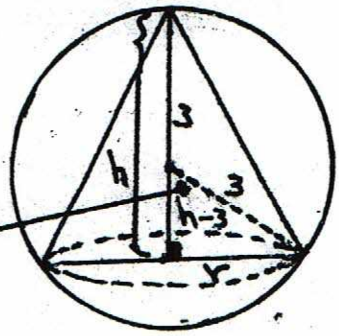
$x = \sqrt{18(6)} \Rightarrow x = \sqrt{108} \Rightarrow x = \sqrt{36 \times 3} \Rightarrow x = 6\sqrt{3}$

$\therefore 2x = 12\sqrt{3}$ cm ، $h = 18$ cm أبعاد المثلث

$\frac{A_{\text{المثلث}}}{A_{\text{الدائرة}}} = \frac{xh}{r^2\pi} = \frac{(6\sqrt{3})(18)}{(12)^2\pi} = \frac{108\sqrt{3}}{144\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

س/ جد حجم اكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها 3 cm

نفرض ابعاد المخروط r, h والحجم V.



$V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$ ------ ①

$r^2 + (h-3)^2 = 9$ مبرهنة فيثاغورس للمثلث الصغير

$r^2 + h^2 - 6h + \cancel{9} = \cancel{9}$

$r^2 + h^2 - 6h = 0 \Rightarrow r^2 = 6h - h^2$ ------ ② نعوض ② في ①

$V = \frac{1}{3}\pi h(6h - h^2) \Rightarrow V = \frac{\pi}{3}(6h^2 - h^3)$

$V' = \frac{\pi}{3}(12h - 3h^2)$, $V' = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3}(12h - 3h^2) = 0 \,]\div \frac{\pi}{3}$

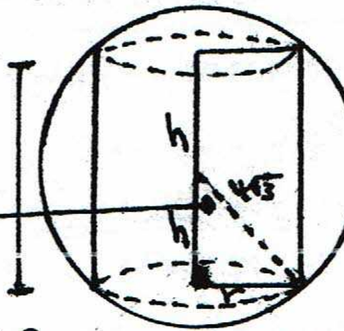
$12h - 3h^2 = 0 \,]\div 3 \Rightarrow 4h - h^2 = 0 \Rightarrow h(4-h) = 0$ < $h = 0$ يهمل ، $h = 4\,cm$

$r^2 = 6(4) - (4)^2 \Rightarrow r^2 = 24 - 16 \Rightarrow r^2 = 8$ نعوض قيمة h في ②

$\therefore V = \frac{\pi}{3}(8)(4) \Rightarrow V = \frac{32}{3}\pi\, cm^3$. حجم اكبر مخروط

س/ جد ارتفاع اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كرة نصف قطرها $4\sqrt{3}$ cm .

نفرض ابعاد الاسطوانة $r, 2h$ والحجم V



$V = r^2 \pi (2h)$ ------ ①

$r^2 + h^2 = (4\sqrt{3})^2$ فيثاغورس

$r^2 + h^2 = 48 \Rightarrow r^2 = 48 - h^2$ ② نعوض ② في ①

$V = 2\pi h(48 - h^2) \Rightarrow V = 2\pi(48h - h^3)$ * ارتفاع اسطوانة داخل كرة يكون 2h

$V' = 2\pi(48 - 3h^2)$, $V' = 0$

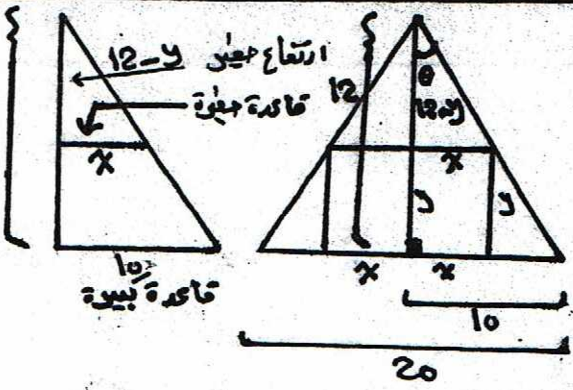
$2\pi(48 - 3h^2) = 0 \,]\div 2\pi$

$48 - 3h^2 = 0 \,]\div 3$

$16 - h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 16 \Rightarrow h = 4$

$\therefore 2h = 2(4) = 8\, cm$ ارتفاع اكبر اسطوانة

س: جد بعدي أكبر مستطيل يمكن أن يوضع داخل مثلث متساوي الساقين طول قاعدته 20cm وارتفاعه 12cm بحيث رأسين متجاورين من رؤوسه يقعان على القاعدة والرأسين الأخيرين يقعان على الساقين؟



نفرض أبعاد المستطيل 2x , y ومساحته A

$A = 2xy$ ------ ①

المعادلة الثانية نجدها أما بـ tan او تشابه مثلثين

$$\frac{\text{ارتفاع كبير}}{\text{قاعدة كبيرة}} = \frac{\text{ارتفاع صغير}}{\text{قاعدة صغيرة}}$$

$$\frac{12}{10} = \frac{12-y}{x} \Rightarrow 6x = 60 - 5y$$

$x = \frac{60-5y}{6}$ ------ ②

نعوض ② في ①

* طريقة أخرى لإيجاد المعادلة الثانية

$$\tan\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{x}{12-y} = \frac{10}{12}$$

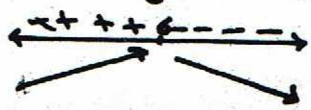
المثلث الصغير   المثلث الكبير

$6x = 60 - 5y$

$$A = 2y\,\frac{60-5y}{6} \Rightarrow A = \frac{1}{3}(60y - 5y^2) \Rightarrow A' = \frac{1}{3}(60 - 10y)$$

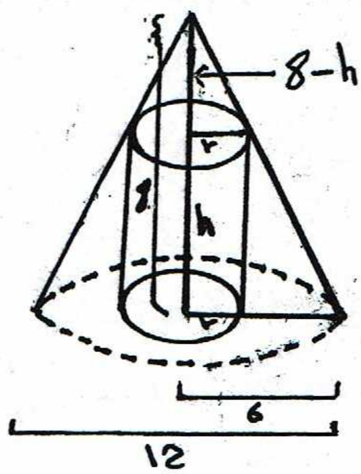
$$A' = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}(60 - 10y) = 0\,]\div\frac{1}{3} \Rightarrow 60 - 10y = 0\,]\div 10$$

$6 - y = 0 \Rightarrow y = 6$ نعوض قيمة y في ② $\Rightarrow x = \frac{60-5(6)}{6} \Rightarrow x = \frac{60-30}{6} = \frac{30}{6} = 5$



$\therefore 2x = 10cm\,,\ y = 6cm$ أبعاد المستطيل

س: جد أبعاد أكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 8cm وطول قطر قاعدته 12cm



نفرض أبعاد الاسطوانة r , h وحجمها V

$V = r^2\pi h$ ------ ①

$$\frac{\text{ارتفاع كبير}}{\text{قاعدة كبيرة}} = \frac{\text{ارتفاع صغير}}{\text{قاعدة صغيرة}} \Rightarrow \frac{8}{6} = \frac{8-h}{r}$$

$4r = 24 - 3h \Rightarrow 3h = 24 - 4r$

$h = \frac{(24-4r)}{3}$ ------ ②   نعوض ② في ①

$$V = r^2\pi\frac{(24-4r)}{3} \Rightarrow V = \frac{\pi}{3}(24r^2 - 4r^3)$$

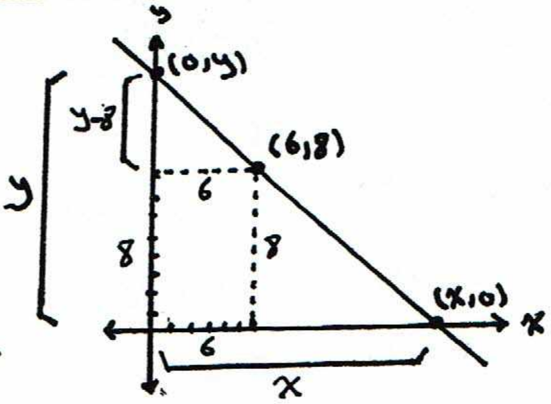
$$V' = \frac{\pi}{3}(48r - 12r^2)\,,\ V' = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3}(48r - 12r^2) = 0\,]\div\frac{\pi}{3}$$

$48r - 12r^2 = 0\,]\div 12 \Rightarrow 4r - r^2 = 0 \Rightarrow r(4 - r) = 0$ < $r = 0$ يهمل ، $4 - r = 0 \Rightarrow r = 4$ نعوض في ②

$h = \frac{24-4(4)}{3} \Rightarrow h = \frac{8}{3}$, $\therefore r = 4cm\,,\ h = \frac{8}{3}cm$

س: جد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة (6,8) والذي يصنع مع المحورين في الربع الاول اصغر مثلث.

نفرض ابعاد المثلث x , y والمساحة A



$A = \frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع
المثلث

$A = \frac{1}{2} xy$ ----- ①

نجد المعادلة الثانية من تشابه مثلثين

$\frac{\text{ارتفاع كبير}}{\text{قاعدة كبير}} = \frac{\text{ارتفاع صغير}}{\text{قاعدة صغير}} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{y-8}{6}$

$(y-8)x = 6y \Rightarrow x = \frac{6y}{y-8}$ ----- ②

نعوض ② في ①

$A = \frac{1}{2} y \frac{6y}{y-8} \Rightarrow A = \frac{3y^2}{y-8}$

$\bar{A} = \frac{(y-8)(6y)-(3y^2)(1)}{(y-8)^2}$, $\bar{A} = 0$

نأخذ البسط فقط

$6y^2 - 48y - 3y^2 = 0 \Rightarrow 3y^2 - 48y = 0] \div 3$

$y^2 - 16y = 0 \Rightarrow y(y-16) = 0$

$y = 0$ لا يتحقق

$y - 16 = 0 \Rightarrow y = 16$

- - - 16 + + +

صغرى

طريقة اخرى لايجاد المعادلة الثانية

أن m (الجزء) = m (الكل) لانه مستقيم

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

الكل $\frac{y-0}{0-x}$ = $\frac{y-8}{0-6}$ الجزء

$\frac{y}{-x} = \frac{y-8}{-6}$

$-x(y-8) = -6y$

$x = \frac{6y}{y-8}$ ----- ②

وبالرجوع الى الرسم نرى أن النقطة (0,y) سوف تكون (0,16)

∴ اصبح لدينا نقطتين هما (0,16) , (6,8)

ومن خلال النقطتين نجد الميل وذلك باستخدام القانون

$m_{\text{ميل}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{16-8}{0-6} = \frac{8}{-6} = \frac{-4}{3}$

∴ لقد توفر لدينا نقطة $\overset{x\ y}{(0,16)}$ وميل $\frac{-4}{3}$

نقوم بايجاد معادلة المستقيم عن طريق استخدام القانون

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 16 = \frac{-4}{3}(x - 0)] \times 3 \Rightarrow 3y - 48 = -4x \Rightarrow 4x + 3y - 48 = 0$ معادلة المستقيم

واجب

س: جد معادلة المستقيم المار من النقطة (-4,8) والذي يصنع مع المحورين في الربع الثاني اصغر مثلث

$[y - 2x - 16 = 0] = 2\cdot$

س: جد معادلة المستقيم المار من النقطة (2,8) والذي يصنع مع المحورين في الربع الاول اصغر مثلث

[4x ... 16 ... 0

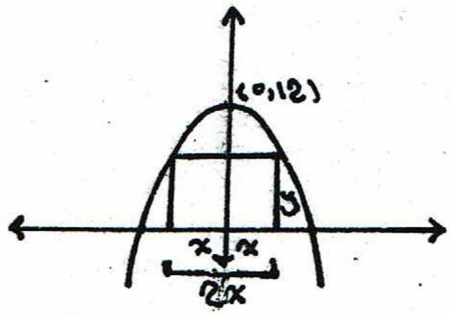
س٧ جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بالدالة $f(x)=12-x^2$ ومحور السينات رأسان من رؤوسه على المنحني والرأسان الآخران على محور السينات ثم جد محيطه.

نفرض ابعاد المستطيل $2x, y$ والمساحة A والمحيط P

نقوم بأخذ نقاط مساعدة موجبة وسالبة لمعرفة شكل الرسم فيكون الرسم متناظر مع محور الصادات

$A=2xy$ ------ ①

$y=12-x^2$ ------ ② من السؤال



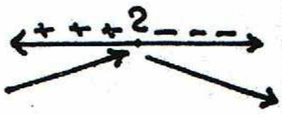
$A=2x(12-x^2) \Rightarrow A=24x-2x^3$

$A'=24-6x^2 \ , \ A'=0 \Rightarrow 24-6x^2=0 \,]\div 6$

$4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2$

$\therefore 2x=2(2) \Rightarrow 2x=4$ وحدة البعد

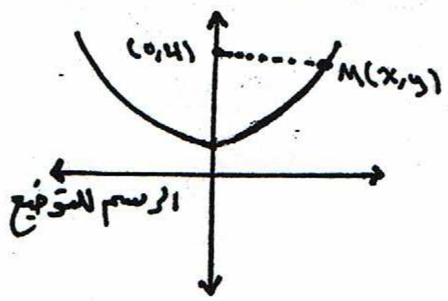
$\therefore y=12-4 \Rightarrow y=8$ وحدة البعد



$\therefore$ المحيط $P=4x+2y \Rightarrow P=4(2)+2(8) \Rightarrow P=24$ وحدة

س٨ جد نقطة او نقاط تنتمي للقطع الزائد $y^2-x^2=3$ بحيث تكون اقرب ما يمكن للنقطة (0,4).

نفرض أن النقطة $M(x,y)$ تنتمي للقطع والبعد بينها وبين النقطة $(0,4) = S$



$S=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$S=\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}$

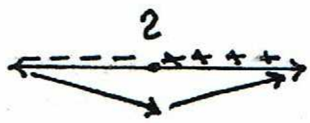
$S=\sqrt{x^2+y^2-8y+16}$ ------ ①

$y^2-x^2=3$ من السؤال $\Rightarrow y^2-3=x^2$ ------ ②

$S=\sqrt{y^2-3+y^2-8y+16} \Rightarrow S=\sqrt{2y^2-8y+13}$

$S'=\dfrac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}} \ , \ S'=0 \Rightarrow \dfrac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+3}}=0$

$4y-8=0 \,]\div 4 \Rightarrow y-2=0 \Rightarrow y=2$ نعوض في ②

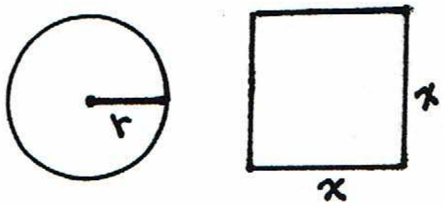


$\therefore x^2=(2)^2-3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$ بأخذ الجذر للطرفين نأخذ عدد موجب وسالب لانها نقطة وليست مسافة

النقاط $(1,2), (-1,2)$

س٢ مجموع محيطي دائرة ومربع يساوي 60cm اثبت أنه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين أصغر ما يمكن فأن طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع .

نفرض ان طول ضلع المربع x ونصف القطر r
والمساحة A والمحيط P



$A =$ مساحة الدائرة + مساحة المربع

$A = r^2\pi + x^2$ ----- ①

$P =$ محيط الدائرة + محيط المربع

$60 = 2r\pi + 4x \,]\div 2 \Rightarrow 30 = r\pi + 2x \Rightarrow r\pi = 30 - 2x$

$r = \dfrac{30-2x}{\pi}$ ----- ②   نعوض ② في ①

$A = \pi\left(\dfrac{30-2x}{\pi}\right)^2 + x^2 \Rightarrow A = \pi\dfrac{(30-2x)^2}{\pi^2} + x^2$

$A = \dfrac{1}{\pi}(30-2x)^2 + x^2 \Rightarrow A' = \dfrac{2}{\pi}(30-2x)^1 \cdot (-2) + 2x \;,\; A' = 0$

$-\dfrac{4}{\pi}(30-2x) + 2x = 0 \,]\times\pi$

$-4(30-2x) + 2\pi x = 0 \Rightarrow -120 + 8x + 2\pi x = 0 \,]\div 2$

$-60 + 4x + \pi x = 0 \Rightarrow 4x + \pi x = 60 \Rightarrow x(4+\pi) = 60$

طول ضلع المربع $x = \dfrac{60}{4+\pi}$ نعوض قيمة x في ②

$r = \dfrac{30 - 2\left(\frac{60}{4+\pi}\right)}{\pi} \Rightarrow r = \dfrac{\frac{30}{1} - \frac{120}{4+\pi}}{\pi}$ نوحد مقامات

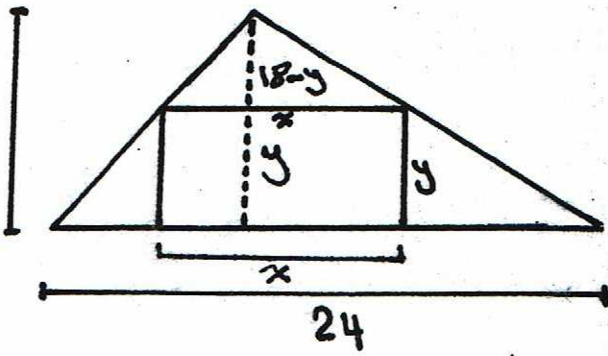
$r = \dfrac{\frac{120 + 30\pi - 120}{4+\pi}}{\pi} \Rightarrow r = \dfrac{\frac{30\pi}{4+\pi}}{\pi} \Rightarrow r = \dfrac{30}{4+\pi}$ نصف القطر

طول ضلع المربع $x = 2r$ طول قطر الدائرة

$2\left(\dfrac{30}{4+\pi}\right) = \dfrac{60}{4+\pi}$

س/ جد بعدي أكبر مستطيل يمكن أن يوضع داخل مثلث طول قاعدته 24 cm وارتفاعه 18 cm بحيث أن رأسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والرأسين الباقيين تقعان على ساقيه.

نفرض ابعاد المستطيل x, y والمساحة A



$A = xy$ ------ ①

من تشابه المثلثان نحصل

$\frac{\text{ارتفاع صغير}}{\text{قاعدة صغير}} = \frac{\text{الارتفاع كبير}}{\text{قاعدة كبيرة}}$

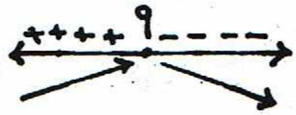
$\frac{18-y}{x} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

$3x = 72 - 4y \Rightarrow x = \frac{72-4y}{3}$ ------ ②

نعوض ② في ①: $A = y\left(\frac{72-4y}{3}\right) \Rightarrow A = \frac{1}{3}(72y - 4y^2)$

$A' = \frac{1}{3}(72 - 8y)$, $A' = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}(72-8y) = 0] \div \frac{1}{3}$

$72 - 8y = 0] \div 8 \Rightarrow 9 - y = 0 \Rightarrow y = 9\ cm$ البعد



$x = \frac{72-4(9)}{3} \Rightarrow x = \frac{72-36}{3} \Rightarrow x = \frac{36}{3} \Rightarrow x = 12\ cm$ البعد

واجب

س1/ ليكن $y = \sqrt{x^2-3}$ جد نقطة تنتمي للمنحني وتكون أقرب ما يمكن الى النقطة (4,0)
[(2,-1),(2,1)] = ج.

س2/ جد حجم أكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 12 cm ونصف قطر قاعدته 9 cm
[$V = 144\pi\ cm^3$] = ج.

س3/ حاوية على هيئة اسطوانة دائرية حجمها (216π) cm^3 جد ابعادها اذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعتها اقل ما يمكن مع العلم أن الحاوية مفتوحة من الاعلى.
[r=6 , h=6] = ج.

س4/ جد ابعاد اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية اكبر ما يمكن موضوعة داخل كرة نصف قطرها $6\sqrt{2}$ cm
[r=6, h=12] = ج.

س5/ جد مساحة اكبر مستطيل اضلاعه موازية للمحورين ورأسان من رؤوسه يقعان على محور السينات والرأسان الاخران يقعان على منحني الدالة $y = 6 - x^2$
[$8\sqrt{2}$ cm] = ج.

س6/ جد ابعاد اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث متساوي الاضلاع وارتفاعه $4\sqrt{3}$
[$x=2, y=2\sqrt{3}$] = ج.

س7/ مخروط دائري قائم طول مولده (ارتفاعه الجانبي) $9\sqrt{3}$ cm جد ارتفاع هذا المخروط لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن
[h=9] = ج.

س8/ جد ابعاد مخروط دائري قائم حجمه أقل ما يمكن ويحيط بكرة نصف قطرها 3 cm
[h=

أختبار الفصل الثالث

أختبار أول

س١ اذا كانت $y = x\sin x$ فبرهن $y^{(4)} - y + 4\cos x = 0$

س٢ كرة حجمها $(84\pi\, m^3)$ جد نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة .

س٣ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم المنحني $f(x) = (x+2)(x-1)^2$

س٤ اذا كانت $f(x) = ax^2 - 4x + 5$ دالة تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-1, b]$ فاذا كانت $c = 2$ تنتمي للفترة $(-1, b)$ فجد قيمة $a, b \in R$.

اختبار ثاني

س١ اذا كان للدالة $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x + c$ نهاية صغرى محلية هي $x = 3$ ونقطة انقلاب هي $(1, -4)$ جد قيم الثوابت $a, b, c \in R$

س٢ بين هل أن الدالة $f(x) = \cos 2x + 2\cos x$ في الفترة $[0, 2\pi]$ تحقق مبرهنة رول ثم جد قيمة c الممكنة .

س٣ باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصورة تقريبية $\sqrt[3]{0.12}$

س٤ جد بعدي أكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها $4\sqrt{2}\ cm$.

اختبار ثالث

س١ مكعب صلد طول حرفه $(8cm)$ مغطى بطبقة من الجليد بحيث يبقى شكله مكعباً فاذا بدء الجليد بالذوبان بمعدل $(6\ cm^3/s)$ فجد معدل النقصان بسمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها هذا السمك $(1cm)$.

س٢ هل الدالة $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ ، $[-2, 7]$ دالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة ثم جد قيمة c الممكنة .

س٣ اذا كان للدالة $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية عظمى محلية تساوي 8 ، ونقطة انقلاب عند $x = 1$ فجد قيمة $a, c \in R$.

س٤ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم المنحني البياني للدالة $yx^2 = 1$

اختبار رابع

س1/ اذا كانت $f:[0,b] \to R$, $f(x)=x^3-4x^2$ وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c=\frac{2}{3}$ جد قيمة b

س2/ سلم طوله (10m) يستند طرفه الاسفل على ارض أفقية وطرفه العلوي على حائط رأسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل 2 m/s عندما يكون الطرف الاسفل على بعد (8m) عن الحائط جد ① معدل انزلاق الطرف العلوي ② سرعة تغير الزاوية بين السلم والارض

س3/ يراد طلاء مكعب طول ضلعه 10cm فاذا كان سمك الطلاء 0.15 cm فجد حجم الطلاء بصورة تقريبية وباستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

س4/ ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل منحني الدالة $f(x)=(1-x)^3+1$

اختبار خامس

س1/ جد ارتفاع اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كرة نصف قطرها $(4\sqrt{3}\ cm)$

س2/ اذا كان $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, $g(x)=1-12x$ وكان كلا من f, g متماسان عند نقطة انقلاب المنحني f وهي (1,-11) جد قيمة الثوابت $a,b,c \in R$.

س3/ اذا كانت $f(x)=\sqrt[5]{31x+1}$ جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة القيمة التقريبية الى $f(1.01)$

س4/ صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها تساوي $96cm^2$ يتمدد طولها بمعدل 2 cm/s بحيث تبقى مساحتها ثابتة جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها 8cm .

س٩ جد ابعاد علبة اسطوانية دائرية قائمة موضوعة داخل كرة نصف قطرها $(6\sqrt{2}\ cm)$ لتكون مساحتها الجانبية اكبر ما يمكن

ج. = [نصف القطر = 6 cm , الارتفاع = 12 cm]

س١٠ اذا كان نصف قطر كرة يساوي نصف قطر اسطوانة دائرية قائمة وكان مجموع حجمي الكرة والاسطوانة يساوي $90\pi\ cm^3$ جد طول نصف قطر الكرة عندما يكون مجموع مساحتيهما الكليتين اصغر ما يمكن. ج. = [r=3]

س١١ قطعة سلك طولها (8 cm) قطعت الى قطعتين بحيث صنع من الاولى دائرة ومن الثانية مستطيل طوله ضعف عرضه جد طول كل قطعة (اي جد طول كل محيط) لكي يكون مجموع مساحتي المستطيل والدائرة اقل ما يمكن

س١٢ اوجد بعدي اكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 6cm ونصف قطر قاعدته 5cm

ج. = $[r = \frac{10}{3}\ cm\ ,\ h = 2\ cm]$

تمت بعونه تعالى

للمزيد من الملازم والدروس وكل ما يخص طلبة السادس الأعدادي زورونا على مواقع التواصل الأجتماعي ...

رحلة التفوق في السادس

عطاء بلا حدود

ا.د مينا الاحمد

ا.د اشرف الوائلي